现代数学基础丛书

序半群引论

● 谢祥云 著



科学出版社

现代数学基础丛书

序半群引论

谢祥云　著

科学出版社

2001

内 容 简 介

本书介绍了序半群代数理论的基础知识及最新研究成果. 全书共分八章: 第零章介绍一些必要的概念, 第一章讨论序半群的一般理论, 第二章讨论序半群的同余理论, 第三章讨论序半群的分解, 第四及第五章分别讨论了两类特殊的序半群, 第六章讨论了序半群的表示理论, 第七章讨论了序半群与理论计算机科学的关系.

本书力求简明扼要, 可作为数学专业本科高年级的选修教材和研究生教材, 也可作为数学研究工作者的参考用书.

图书在版编目 (CIP) 数据

序半群引论/谢祥云著 . -北京: 科学出版社, 2001
(现代数学基础丛书)
ISBN 7 03-008693 7

Ⅰ. 序… Ⅱ 谢… Ⅲ. 半群 基本知识 Ⅳ. O152.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2000) 第 66217 号

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码 100717

新 蕾 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001 年 1 月第 一 版　　开本 850×1168 1/32
2001 年 1 月第一次印刷　　印张: 8 7/8
印数: 1—2 000　　字数: 227 000

定价: 18.00 元

序

作为序代数理论的一个分支，序半群的研究近 30 年来已有了蓬勃的发展．国内在这方面起步稍晚，但由于半群理论的研究在国内已有相当可观的基础，这就很自然地引发了对序半群的研究．包括本书作者在内的国内学者近 10 年来已做出不少成绩．谢祥云的《序半群引论》一书就是在他为研究生授课的基础上整理出来的一部专著，其中包含了他本人和他的国内外同行们的部分研究成果．

这本书在给出序半群的基础知识和基本理论后，有选择地介绍了这一分支的若干最新研究成果或指出当前的研究动向．本书论述简洁，深入浅出，若干仅指出证明思路之处是特意留给读者作为练习的．我个人认为，无论为培养序半群方向的研究生，或是对具有半群理论基础而有志于从事序半群研究的读者而言，它都是一本适时的佳作．在当前同类的专著尚不多见，特别是国内同类出版物尚属空白的情况下，相信这本书的出版必然会对序半群理论的研究起到促进作用．出于这一感受，我十分乐意把它推荐给读者，并作此序．

戴执中

2000.5.28

前 言

早在 20 世纪 40 年代，美国著名数学家 G.Birkhoff 在他的名著 ≪ 格论 ≫ (美国数学会在 20 世纪 60 及 70 年代均再版) 一书中，就有格序半群这一章，之后有序代数理论得到了很大的发展，特别是有序群 (格序群) 理论由于有很强的群论理论基础做依托从 60 年代开始一枝独秀，很快从代数理论中分离出来，在 L. Fuchs, P. Conrad 及 W. Holland 等著名数学家的推动下发展成一个完整的研究体系.

半群的代数理论是在数学内部和外部 (特别是计算机科学) 的强烈推动下从 20 世纪 50 年代到 60 年代发展起来的一个崭新的代数分支. 在半群代数理论的强烈背景下，半群的序结构理论从 60 年代开始得到了很大的发展. 60 年代初，L. Fuchs 写出了第一本序代数理论 (包括序群、序环、序域、序半群) 的专著，格代数与半群代数结合比较完美的格序半群理论也作为该书重要的一章. 和半群代数理论的发展同步，序半群理论在近 30 多年中，主要有以下几个方面的进展. 第一，全序半群 (totally ordered semigroups) 结构的研究. 六七十年代，T. Saitô 和 M. Satyanarayana 在全序半群的分解及扩张研究中做了大量的工作. 1979 年，M. Satyanarayana 还撰有专著 ≪ 正序半群 ≫ (Positively Ordered Semigroups)，收集了 70 年代之前全序半群的研究工作. 第二，是用研究序群的方法来研究序半群特别是格序半群的结构，在这方面研究中重点突出了正锥及格结构的重要性. 第三，70 年代初，Blyth 和 Janowitz 合著了一本专著 ≪ 剩余理论 ≫ (Residuated Theory). 之后，T.S.Blyth 和他的学生们对可剩余的序半群 (包括自然序半群) 做了大量研究. 第四，偏序半群的一般结构理论的研究. 这方面的工作是现今最活

跃的方向之一，主要是 80 年代后期由 Kehayapulu 和她的学生 Tingelis, 作者以及中国其他一些学者在推动该领域的发展.

著者在 80 年代初期在戴执中教授、陈炳辉教授及漆芝南教授的指导下，开展了有序代数结构，特别是序群的研究， 90 年代初，在郭聿琦教授的指导下，全面开展序半群的研究. 我们注意到序半群一般理论研究之所以发展较晚，也可以说序半群和序群研究同时起步，为什么序半群没有序群发展迅速，关键在没有找到一个像格序群中 L 理想这样的工具. 我们知道，一个序半群关于一个同余之商不一定是序半群 (带非平凡序). 90 年代初作者和其他学者一道完成了序半群正则同余理论的建立，这项工作得到了国内外学者的充分肯定，得到了国家自然科学基金一项及广东省自然科学基金三项资助. 尽管在 20 世纪六七十年代初在序半群研究的某些方向有两本专著出版，但迅速发展起来的一般序半群理论及序半群理论和计算机科学之间的联系，有必要系统地介绍给广大科研工作者.

本书在作者开设的研究生课程 ≪ 偏序半群引论 ≫ 的基础上改编而成的. 全书共分八章. 第零章介绍偏序集和序半群的必要的基本概念. 第一章讨论了一般序半群理论. 第二章介绍序半群的正则同余理论. 第三章讨论了序半群的半格、带及亚直积分解. 第四、五章分别讨论了两类特殊的序半群, 即格序半群与负序半群. 第六章讨论了序半群的表示理论. 第七章讨论了序半群与理论计算机科学间的关系. 本书在介绍序半群一般理论的同时，还重点介绍了作者本人和国际上最新研究成果 (包括待发的研究工作). 本书中有些结论的证明是很粗略的，这些结论的给出目的往往不在于证明的本身，而是试图使读者从这些结论中得到一种思想.

由于序半群研究近几十年来成果丰富，考虑到全序半群及剩余半群理论分别在 70 年代初各有一本专著存在，所以在选题上重点选用了序半群的一般理论以及序半群的表示论、同余理论和它的应用. 我十分遗憾本书没有收入序半群剩余理论许多优美的

结论. 例如 Blyth 和他的学生在 90 年代的大量工作.

本书的出版和所论及的课题的研究工作得到了国家自然科学基金 (19761004) 、广东省自然科学基金 (990825) 、五邑大学学术著作出版基金、五邑大学海外科研基金的资助, 在此表示衷心的感谢. 另外作者衷心感谢导师戴执中教授、郭聿琦教授和漆芝南教授多年来的指导、帮助和鼓励. 对英年早逝的陈炳辉老师表示无限的怀念. 感谢香港中文大学岑嘉评 (K.P.Shum) 教授及雅典大学 Niovi Kehayopulu 教授对作者的教诲和鼓励. 作者特别致谢作为同学、同事和妻子的吴明芬副教授的一贯支持和为本书稿的打印所付出的辛勤劳动.

受水平所限, 书中难免有错且取材可能不当, 敬请读者批判指正.

谢祥云

1998.10 于江门

目　录

第零章　基本概念

§1　偏序集与格

设 X 是非空集，$\leq$ 为 X 上的二元关系，如果

i) $\leq$ 是自反的，即 $(\forall x \in X)\ x \leq x$；

ii) $\leq$ 是传递的，即 $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$；

iii) $\leq$ 是反对称的，即 $x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$.

则称 $\leq$ 为 X 上的偏序关系，称 $(X, \leq)$ 为偏序集. 在不致于混淆的前提下，偏序集也简写为 X.

例 0.1.1 1) 设 X 为实数集 $\mathbf{R}$, $\leq$ 为 $\mathbf{R}$ 上通常大小关系，则 $(X, \leq)$ 为偏序集.

2) 设 $X = C[0,1]$, 即定义在 $I = [0,1]$ 区间上的所有连续函数全体，设 $f, g \in X$, 规定

$$f \leq g \Leftrightarrow (\forall x \in [0,1])\ \ f(x) \leq g(x),$$

则 $(X, \leq)$ 也为偏序集.

偏序集我们有时也用 Hasse 图来表示.

设 $(X_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ 是一个偏序集簇, 则它们的笛卡尔积 $\prod\limits_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha$ 关于下面偏序关系

$$(x_\alpha)_{\alpha\in\Gamma} \leq (y_\alpha)_{\alpha\in\Gamma} \Leftrightarrow (\forall \alpha \in \Gamma)\ x_\alpha \leq_\alpha y_\alpha$$

也为偏序集.

如果 $\forall x, y \in X, x \leq y$ 或 $y \leq x$ 成立，则称 X 为链. 设 $I \subseteq X$, 如果 $\forall x \in I$,

$$(x] = \{y \in X \mid y \leq x\} \subseteq I,$$

I 称为 X 的理想，$(x]$ 也是 X 的 (序) 理想，这里这种形式的理想我们称为主理想. 设 $J \subseteq X$, 如果 $\forall y \in J$, 有 $[y) = \{z \in X \mid y \leq z\} \subseteq J$, 则 J 称为 S 的 (序) 滤子，$\forall y \in X$, $[y)$ 称为 X 的主滤子.

设 P, Q 为两个偏序集，$f: P \to Q$ 是一个映射，设 $R \subseteq Q$, 则 $f^{-1}(R)$ 称为 R 的原像. 我们有下面的结论.

定理 0.1.2 设 A 和 B 为两个偏序集，f 为 A 到 B 的映射，则下列各款等价：

1) $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$；

2) B 的每个主理想的原像要么为空，要么为 A 的理想；

3) B 的每个主滤子的原像要么为空，要么为 A 的滤子.

满足定理 0.1.2 中任一款的映射 f 称为保序的 (isotone), A 和 B 称为同构的 (序同构), 如果存在双射 f 使得 f 和 f^{-1} 均为保序的.

定义 0.1.3 设 $(X, \leq)$ 是偏序集，$A \subseteq X, a \in X$. a 称为 A 的上界，若 $(\forall x \in A)\ x \leq a$. 若 A 有一最小上界 a, 即 a 为 A 的上界且对 A 的任一上界 b 总有 $a \leq b$, 则称 a 为 A 的上确界，记作 $a = \sup A$. 对偶地，可定义 A 的下确界.

注 0.1.4 1) 偏序集 X 的子集 A 不必有上界. 例如在例 0.1.1 1) 中，$A = \mathbf{R}^+$, 则 A 在 $\mathbf{R}$ 中没有上界. 有上界的子集也未必有上确界.

2) 由上定义, 若 A 为空集 $\emptyset$, 则 X 的每个元素均为 A 的上界也为 A 的下界, 这是因为 “$x \in \emptyset \Rightarrow x \leq a$” 与 “$x \in \emptyset \Rightarrow a \leq x$” 总成立. 至于 $\emptyset$ 有没有上 (下) 确界, 就取决于 X 有没有最小 (大) 元了. 例如 $\mathbf{R}$ 中空集 $\emptyset$ 就没有上下确界, 而 $A = [0,1] \subseteq \mathbf{R}$ 中, $\sup \emptyset = 0$, $\inf \emptyset = 1$.

定义 0.1.5 偏序集 $(X, \leq)$ 称为格，如果 $(\forall a, b \in L)$ $\sup(a,b)$ 和 $\inf(a,b)$ 均存在.

显然全序集为格. 设 X 为集合, 它的幂集 $\mathcal{P}(X)$ 关于集合的包含关系是一个格.

定理 0.1.6 设 L 为格, 则 $\forall a,b,c \in L$,

1) $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c, a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$;

2) $a \vee b = b \vee a, a \wedge b = b \wedge a$;

3) $a \wedge (a \vee b) = a, a \vee (a \wedge b) = a$.

反之, 设 $(L, \wedge, \vee)$ 为 $(2,2)$ 型代数且满足上述 1) —3), 则我们可以在 L 上定义二元关系

4) $a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b$,

L 关于 $\leq$ 是一个格且

$$\sup(a,b) = a \vee b, \inf(a,b) = a \wedge b.$$

在格 L 中, $a,b \in L$ 且 $a \leq b$, 子集

$$I = [a,b] = \{x \in L \mid a \leq x \leq b\}$$

称为 a 和 b 决定的区间, L 到 I 的映射 λ 和 ρ 定义为

$$\lambda : x \to (x \wedge b) \vee a, \rho : x \to (x \vee a) \wedge b.$$

则 i) $x \in I$, ii) $x\lambda = x$ 和 iii) $x\rho = x$ 是等价的, 且 $x\lambda \leq x\rho, \forall x \in L$, 即

$$(x \wedge b) \vee a \leq (x \vee a) \wedge b, \forall x \in L.$$

如果上式等号成立, 我们称 I 为模的 (modular). 如果 L 的每个区间均为模的, L 称为模格, 即

$$a \leq b \Rightarrow (c \vee a) \wedge b = (c \wedge b) \vee a, \forall c \in L.$$

模格的一个典型例子是群 G 的正规子群集 $N(G)$ 关于集合的包含关系构成格, $A,B \in N(G)$,

$$A \wedge B = A \cap B, A \vee B = AB = \{ab \in G \mid a \in A, b \in B\}.$$

定理 0.1.7 格 L 为模格当且仅当 L 不包含一个子格同构于五边形 N_5 .

另一个重要类型的格是分配格. 格 L 是分配的，如果 L 满足：$\forall a,b,c\in L$,

1) $(a\wedge b)\vee c=(a\vee c)\wedge(b\vee c)$;

2) $(a\vee b)\wedge c=(a\wedge c)\vee(b\wedge c)$.

事实上，以上 1), 2) 和下面的

3) $(c\vee a)\wedge\leq(c\wedge b)\vee a$

均可以作为分配格的刻画，即 L 为分配格当且仅当 L 满足以上 1), 2), 3) 任意一条. 因此分配格一定为模格.

定理 0.1.8 格 L 是分配格的充要条件是它含任何五边形 N_5 和菱形 M_5.

由定理 0.1.8, 我们容易证明

定理 0.1.9 格 L 是分配格当且仅当

$$(\forall a,b,c\in L)\ a\vee c=b\vee c,a\wedge c=b\wedge c\Rightarrow a=b.$$

定理 0.1.9 可以另外叙述为

定理 0.1.10 格 L 是分配格当且仅当它的任何元在包含它们的任何区间上都最多只有一个补元.

有补元的分配格称为 Boole 格. 设 $S\subseteq\mathcal{P}(X)$, S 称为集环，如果对任意 $A,B\in S$, $A\cup B\in S,A\cap B\in S$. 集环 S 称为集域，如果 $A\in S$, 则 $A'=X-A\in S$. 显然集环是分配格，而集域就是 Boole 格. 我们知道格的所有理想集 $I(L)$ 关于集合的包含关系也构成一个格，且 $\forall I,J\in I(L)$,

$$I\wedge J=I\cap J,I\vee J=\{x\in L\mid x\leq i\vee j,i\in I,j\in J\}.$$

定理 0.1.11 格 L 是分配格的充要条件是对任意 $I,J\in$

$I(L)$ 都有

$$I \vee J = \{i \vee j \mid i \in I, j \in J\}.$$

证明 设 L 为分配格，则 $\forall x \in I \vee J$，存在 $i_1 \in I, j_1 \in J$ 使得 $x \leq i_1 \vee j_1$，

$$x = x \wedge (i_1 \vee j_1) = (x \wedge i_1) \vee (x \wedge j_1).$$

令 $i = x \wedge i_1, j = x \wedge j_1$，则 $i \in I, j \in J$ 且 $x = i \vee j$.

反之，如果 L 不是分配格，由定理 0.1.8, L 中包含有 N_5 或 M_5 作为子格. 假设 $N_5 = \{a, b, c, 1, 0\}$ 且 $b < a$, $c \| b, a$；$M_5 = \{a, b, c, 1, 0\}$ 且 $a \| b \| c$. 取 $I = (b], J = (c]$，有 $a \leq b \vee c$，故 $a \in I \vee J$. 如果有 $i \in I, j \in J$ 使得 $a = i \vee j$，则 $i \leq a, j \leq a$. 但 $j \leq c$，故 $j \leq a \wedge c = 0$，于是 $a = i \vee j \leq b$，矛盾. □

定理 0.1.12(Stone 引理) 设 L 为分配格，I 为 L 的理想，F 为 L 的滤子且 $I \cap F = \emptyset$，则必有素理想 $P \subseteq I$，使得 $P \cap F = \emptyset$.

证明 设 $\mathcal{F} = \{J \in I(L) \mid J \supseteq I, J \cap F = \emptyset\}$，则 $\mathcal{F} \neq \emptyset$，由 Zorn 引理，$\mathcal{F}$ 中包含极大元 P. 设 $a \wedge b \in P$，如果 $a \notin P, b \notin P$，则 $(P \vee (a]) \cap F \neq \emptyset$, $(P \vee (b]) \cap F \neq \emptyset$ 但是 $(P \vee (b]) \cap (P \vee (a]) = P$ 和 $P \cap F = \emptyset$ 矛盾. □

推论 0.1.13 设 L 为分配格，$I \in I(L), a \in L$，如果 $a \notin i$，必有素理想 $P \supseteq I$ 使得 $a \notin P$.

推论 0.1.14 设 L 为分配格，$a, b \in L$ 且 $a \neq b$，则必有素理想 P 分离 a 和 b.

定理 0.1.15(分配格的表示定理) 格 L 为分配格的充要条件是 L 和一个集环同构.

证明 我们只要验证映射 $\varphi: L \to \mathcal{P}(L)$

$$(\forall x \in L) \quad \varphi(x) = \{P \in \mathcal{P}(L) \mid x \notin P\}$$

是单射及 $\varphi(L)$ 为集环即可，略去. □

设 L 是模格， $a,b\in L$, 则区间 $I=[a\wedge b,a]$ 和区间 $J=[b,a\vee b]$ 作为格是同构的. 事实上, 映射 $\varphi: I\to J\mid x\to x\vee b$, $\psi: J\to I\mid y\to y\wedge a$ 是互逆映射. 基于此，我们来建立链的加细定理. 设格 L 中有两条链:

$$e=a_0\le a_1\le\cdots\le a_m=a,$$
$$e=b_0\le b_1\le\cdots\le b_n=a.$$

这两条链称为同构的，如果 $m=n$ 且存在 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个置换 π 使得区间 $[a_{i-1},a_i]$ 和 $[b_{i\pi-1},b_{i\pi}]$ 同构. 在任一条链中插入一些新的项称为对该链的加细.

定理 0.1.16(链的加细定理) 模格 L 中任意两条起点和终点相同的链有同构的加细.

证明 设两条链同上，对 $i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n$ ，我们令

$$a_{ij}=(a_i\wedge b_j)\vee b_{j-1},b_{ji}=(b_j\wedge a_i)\vee a_{i-1},$$

则链

$$\begin{aligned}&e=a_{01}\le a_{11}\le\cdots\le a_{m1}\le a_{12}\le\cdots\\&\le a_{m2}\le a_{13}\le\cdots\le a_{mn}=a,\\&e=b_{01}\le b_{11}\le\cdots\le b_{n1}\le b_{12}\le\cdots\\&\le b_{n2}\le b_{13}\le\cdots\le b_{nm}=a\end{aligned}$$

就分别为链 $e=a_0\le a_1\le\cdots\le a_m=a$ 和 $e=b_0\le b_1\le\cdots\le b_n=a$ 的加细链且它们是同构的. □

设 $[a,b]$ 为一个区间，如果 b 为 a 的覆盖，称 $[a,b]$ 为素区间. 一个格 L 的长度是 L 的任意链中所包含的非平凡的素区间的个数的最大值，由定理 0.1.16, 我们有

推论 0.1.17 在有限长的模格中，任意链能被加细成极大链，且起点与终点相同的任意两个极大链长度一致.

设 L 为有限长的模格，则 L 的任意子格也是有限长的. $\forall a \in L$, $[0,a]$ 的长度称为 a 长度，记为 $l(a)$. 这样 L 的长度就是 $l(L)$ 且

$$(\forall a,b \in L) \ \ l(a)+l(b)=l(a\wedge b)+l(a\vee b),$$

因为 $[a\wedge b,a]$ 与 $[b,a\vee b]$ 同构.

本节最后我们介绍一下完备格. 设 X 是偏序集，若 X 的每个子集 A 都有上确界与下确界，即 $\forall A\subseteq X$, $\sup A$ 和 $\inf A$ 恒存在，则称 X 为完备格. 显然有限格一定是完备格.

定理 0.1.18 设 L 为偏序集,

1) 如果 L 中有最大元，并且 L 对非空交运算关闭，即对 L 的任一非空子集 B, $\inf B\in L$, 则 L 构成完备格.

2) 如果 L 中有一最小元，并且 L 对非空并运算关闭，即对 L 的任一非空子集 $B, \sup B\in L$, 则 L 构成完备格.

证明 以 1) 为例进行证明. 只须证 $\sup B$ 存在即可. 事实上，设 $m\in L$ 为 L 的最大元，m 为 B 在 L 中的上界. 令 C 为 B 在 L 中的全部上界之集，则 C 非空. 由假设条件知，$\inf C$ 存在. 它显然是 B 在 L 中的上界而且是 B 在 L 中上界之最小者，所以 $\inf C=\sup B$. □

§2 序半群

设 S 为半群. S 称为序半群，如果 S 上有偏序关系 $\leq$ 使得

$$(\forall a,b,c\in S) \ \ a\leq b\Rightarrow ca\leq cb, ac\leq bc,$$

即 $\forall c\in S$, 映射 $\lambda_x : x\to cx, \forall x\in S$ 和 $\rho_x : y\to yc, \forall y\in S$ 是 S 上的保序映射. 设 $(S,\cdot,\leq)$ 是序半群 (ordered semigroup)

(现在也有人称其为偏序半群 (partially ordered semigroup, po-semigroup), 而将全序半群称为序半群), $x, y \in S$, 如果集

$$\{z \in S \mid zx \leq y\}, \{z \in S \mid xz \leq y\}$$

不空且有最大元存在, 分别记为 $y : x$ 和 $y :: x$, 称为 y 关于 x 的左剩余 (右剩余), 如果对 S 的任意两个运算均有左 (右) 剩余存在, S 称为可剩余的半群 (residuated semigroup).

命题 0.2.1 设 S 为可剩余的半群, 则下列各款成立:

1) $x(y :: x) \leq y$;

2) $xz \leq y \Rightarrow z \leq y :: x$;

3) $(y : x)x \leq y$;

4) $zx \leq y \Rightarrow z \leq y :: x$;

5) $y \leq xy :: x$;

6) $y \leq yx : x$;

7) $x \leq y : (y :: x)$;

8) $x \leq y :: (y : x)$;

9) $a \leq b \Rightarrow (\forall x \in S)\ a : x \leq b : x, a :: x \leq b :: x$;

10) $a \leq b \Rightarrow (\forall x \in S)\ x : a \leq x : b, x :: a \leq x :: b$;

11) $x(y :: x) = y \Leftrightarrow (\exists z \in S)\ y = xz$;

12) $(y : x)x = y \Leftrightarrow (\exists z \in S)\ y = zx$;

13) $xy :: x = y \Leftrightarrow (\exists z \in S)\ y = z :: x$;

14) $yx : x = y \Leftrightarrow (\exists z \in S)\ y = z : x$;

15) $x :: (x : y) = y \Leftrightarrow (\exists z \in S)\ y = x :: z$;

16) $x : (x :: y) = y \Leftrightarrow (\exists z \in S)\ y = x : z$.

证明 根据定义可以直接验证, 略去. □

定理 0.2.2 设 S 为可剩余半群, 则 S 可换当且仅当 $(\forall x, y \in S)\ x : y = x :: y$.

证明 如果 S 可换, 显然 $x : y = x :: y$. 反之, $\forall x, y \in S$, 由于 $xy \leq xy$, 所以 $x \leq xy : y = xy :: y$, 故 $yx \leq xy$; 又

$y \le yx : x = yx :: x$ 得 $xy \le yx$, 因此 $xy = yx$. □

定理 0.2.3 设 S 是可剩余的群胚，则下列各款等价：

1) S 为半群;

2) $(\forall x, y, z \in S)\ (x :: y) :: z = x :: yz$;

3) $(\forall x, y, z \in S)\ (x : y) : z = x : zy$;

4) $(\forall x, y, z \in S)\ (x :: y) : z = (x : z) :: y$;

5) $(\forall x, y, z \in S)\ (x :: y)z \le xz :: y$, $y(x : z) \le yx : z$. □

例 0.2.4 1) 每个 Boole 代数 B 关于运算 "$\cap$" 是可剩余的， $\forall x, z \in B$, 集

$$\{y \in B \mid x \cap y \le z\}$$

不空且有最大元 $z : x = z \cup x^{\perp}$.

2) 每个序群 G 是可剩余的， $\forall x, z \in G$, $z : x = zx^{-1}$, $z :: x = x^{-1}z$.

3) 设 R 为可换环， $I(R)$ 为 R 的理想集，关于集合的包含关系 "$\subseteq$", $(I(R), \subseteq)$ 为偏序集. 设 $I, J \in I(R)$, 定义

$$I \cdot J = \{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid a_i \in I, b_i \in J, n \in \mathbf{Z}^+\},$$

则 $I \cdot J \in I(R)$, 且 $(I(R), \cdot, \subseteq)$ 为序半群,

$$J : I = \{x \in R \mid (\forall b \in I)\ xb \in J\},$$

所以 $I(R)$ 是可剩余的半群.

设 S 为半群且 $(S, \vee, \wedge)$ 为格，如果

$$(\forall a, b, c \in S)\ (a \vee b)c = ac \vee bc, c(a \vee b) = ca \vee cb$$

成立，称 $(S, \cdot, \vee, \wedge)$ 为半格序半群 ($\bigvee$ 半群). 一个 $\bigvee$ 半群如果还满足

$$(\forall a, b, c \in S)\ (a \wedge b)c = ac \wedge bc, c(a \wedge b) = ca \wedge cb,$$

称 S 为格序半群. 设 ρ 为格序半群 S 上的半群同余和格同余, 称 ρ 为 S 的格序同余关系. 如果 ρ 为格序半群 S 上的序同余, 则商半群 S/ρ 也为格序半群.

定义 0.2.5 设 S 和 T 为两个格序半群, φ 为 S 到 T 的映射, 如果

$$(\forall x, y \in S) \qquad \begin{aligned} &\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y), \\ &\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y), \\ &\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y), \end{aligned}$$

则称 φ 为 S 到 T 的 l 同态映射. 当 φ 为一一映射时, φ 称为 l 同构映射.

定理 0.2.6(l 同态基本定理) 1) 设 ρ 为格序半群 S 的 l 同余, 则 $\rho^{\#}: S \to S/\rho$ 是 l 同态.

2) 设 φ 为格序半群 S 到 S_1 的 l 同态映射, 令

$$\mathrm{Ker}\varphi = \{(a, b) \in S \times S \mid \varphi(a) = \varphi(b)\},$$

则 $\mathrm{Ker}\varphi$ 为 S 的 l 同余且存在单 l 同态映射 $\alpha: S/\mathrm{Ker}\varphi \to S_1$ 使得

$$\varphi = \alpha \circ (\mathrm{Ker}\varphi)^{\#}.$$

证明 略去. □

§3 理　想

设 $(S, \cdot, \leq)$ 是序半群, $\emptyset \neq I \subseteq S$, I 称为 S 的右理想, 如果 I 满足:

1) $IS \subseteq I$;

2) $\forall a \in I, b \leq a \Rightarrow b \in I$.

如果将 1) 换成 $SI \subseteq I$, I 称为 S 的左理想. 如果 I 既为 S 的左

理想，又为其右理想， I 称为 S 的理想. $\forall a \in S$, 由 a 生成的左 (右) 理想分别记为 $L(a)(R(a))$, 不难验证

$$L(a) = (a \cup Sa]; R(a) = (a \cup aS].$$

由 a 生成的理想记为 $I(a)$, 我们称之为 S 的主理想， $I(a) = (a \cup Sa \cup aS \cup SaS]$, 可直接记为 (a).

设 A 为 S 的非空子集，由 A 生成的左 (右) 理想分别为 $(A \cup SA]((A \cup AS])$; A 生成的理想为 $(A \cup SA \cup AS \cup SAS]$.

定义 0.3.1 设 $\emptyset \neq Q \subseteq S$, Q 称为 S 的拟理想 (quasi-ideal), 如果 Q 满足:

1) $QS \cap SQ \subseteq Q$;
2) 设 $a \in Q, b \in S$ 且 $b \leq a$, 则 $b \in Q$.

定义 0.3.2 设 $\emptyset \neq B \subseteq S$, B 称为 S 的双理想 (bi-ideal), 如果 B 满足:

1) $BSB \subseteq B$;
2) 设 $a \in B$, $b \in S$ 且 $b \leq a$, 则 $b \in B$.

引理 0.3.3 设 S 为序半群，则下列各款成立:

1) 设 $\emptyset \neq A \subseteq S$, 则 $A \subseteq (A]$;
2) 设 $A \subseteq B \subseteq S$, 则 $(A] \subseteq (B]$;
3) 设 A 为任意型的理想，则 $(A] = A$:
4) 设 $A, B \subseteq S$, 则 $(A](B] \subseteq (AB]$;
5) 设 $A, B \subseteq S$, 一般地， $(A \cap B] \neq (A] \cap (B]$;
6) 设 A, B 是 S 的理想，则 $(AB], A \cup B$ 也为 S 的理想.

证明留作练习. □

命题 0.3.4 设 S 为序半群，则下列各款成立:

1) S 的每个拟理想是双理想;
2) 设 T 为 S 的子半群, A 为 S 的理想, 则如果 $A \cap T \neq \emptyset$, $A \cap T$ 为 T 的理想.

证明 1) 设 Q 为 S 的拟理想, 则 $(Q]=Q$ 且 $QS\cap SQ\subseteq Q$, 因为

$$QSQ\subseteq Q,\quad QSQ\subseteq SQ,$$

故

$$QSQ\subseteq SQ\cap QS\subseteq Q.$$

2) 因为 $T(A\cap T)=TA\cap T^2\subseteq A\cap T$. 同理, $(A\cap T)T\subseteq A\cap T$. 设 $a\in A\cap T, b\in T$ 且 $b\leq a$, 则 $b\in A\cap T$, 故 $A\cap T$ 为 T 的理想. □

引理 0.3.5 设 S 为序半群, 则下列各款等价:

1) 设 A 为 S 的任意理想, 则 $(A^2]=A$;

2) A, B 为 S 的任意理想, $A\cap B=(AB]$;

3) $\forall a,b\in S, I(a)\cap I(b)=(I(a)I(b)]$;

4) $I(a)=(I(a)^2], \forall a\in S$;

5) $a\in(SaSaS], \forall a\in S$.

证明 1) $\Longrightarrow$ 2) 因 $(AB]\subseteq(AS]\subseteq A, (AB]\subseteq(SB]\subseteq B$, 故 $(AB]\subseteq A\cap B$; 另一方面

$$A\cap B=((A\cap B)^2]=((A\cap B)(A\cap B)]\subseteq(AB].$$

2) $\Longrightarrow$ 3), 3) $\Longrightarrow$ 4) 显然.

4)$\Longrightarrow$ 5) 因 $((I(a))^2]=I(a)$, 我们有

$$\begin{aligned}&(I(a))^2=((I(a))^2]I(a)\subseteq((I(a))^3]\\ \Rightarrow\ &(I(a))^3=((I(a))^2](I(a))^2\subseteq((I(a))^4]\\ \Rightarrow\ &(I(a))^4\subseteq((I(a))^5].\end{aligned}$$

因此

$$I(a)=((I(a))^2]\subseteq((I(a))^3]\subseteq((I(a))^5]\subseteq(SI(a)]=I(a).$$

故

$$I(a)=((I(a))^5].$$

另一方面,

$$\begin{aligned}(I(a))^3 &= (a\cup Sa\cup aS\cup SaS]^3\subseteq (SaS]\\ \Rightarrow (I(a))^4 &\subseteq (SaS](a\cup Sa\cup aS\cup SaS]\subseteq (SaSa\cup SaSaS]\\ \Rightarrow (I(a))^5 &\subseteq (SaSa\cup SaSaS](a\cup Sa\cup aS\cup SaS]\\ &\subseteq (SaSaS].\end{aligned}$$

因此

$$a\in I(a)=((I(a))^5]\subseteq ((SaSaS]]=(SaSaS].$$

5) $\Longrightarrow$ 1) 设 A 为 S 的理想,且 $x\in (A^2]$, 则存在 $a,b\in A$ 使得 $x\le ab$, 因 $ab\in A$, 故 $x\in A$. 又设 $x\in A$, 由 $x\in (SxSaS]$, 存在 $t,h,k\in S$ 使得 $x\le txhxk$, 因 $(tx)h\in A, xk\in A$, 故 $x\in (A^2]$. □

以后我们称满足 $A=(A^2]$ 的 S 的理想 (左、右理想) 为幂等的.

第一章　序半群的一般理论

§1　素理想与弱素理想

本节我们将给出类似于环论中关于素理想与完全素理想的有关结论. 值得注意的是，我们将用 Kehayopulu 所定义的素理想与弱素理想来代替 O.Steinfeld 在半群理论中所用的完全素理想与素理想，这种称法和 McCoy 在环论所用的称法一致. 本节的主要结果来自 [1—4] 等.

定义 1.1.1　设 S 为一序半群，T 为 S 的子集，如果对 S 的任意子集 $A,B,AB \subseteq T$，则 $A \subseteq T$ 或 $B \subseteq T$，称 T 为素的；如果对 S 的任意理想 $A,B,AB \subseteq T$，则 $A \subseteq T$ 或 $B \subseteq T$，称 T 为弱素的.

不难看出 T 为素的可等价表述为：$(\forall a,b \in S)ab \in T \Rightarrow a \in T$，或 $b \in T$.

定理 1.1.2　设 S 为序半群，T 为 S 的理想. 则下列各款等价：

1) T 是弱素的；

2) 设 $a,b \in S$ 且 $(aSb] \subseteq T$，则 $a \in T$ 或 $b \in T$；

3) 设 $a,b \in S$ 且 $I(a)I(b) \subseteq T$，则 $a \in T$ 或 $b \in T$:

4) 设 A,B 为 S 的右理想且 $AB \subseteq T$，则 $A \subseteq T$ 或 $B \subseteq T$;

5) 设 A,B 为 S 的左理想且 $AB \subseteq T$，则 $A \subseteq T$ 或 $B \subseteq T$;

6) 设 A 为 S 的右理想，B 为 S 的左理想且 $AB \subseteq T$，则 $A \subseteq T$ 或 $B \subseteq T$.

证明　1) $\Longrightarrow$ 2)　设 $a,b \in S$ 且 $(aSb] \subseteq T$，则

$$(SaS](SbS] \subseteq (SaSSbS] \subseteq (SaSbS] \subseteq STS] \subseteq T.$$

因为 $(SaS], (SbS]$ 均为 S 的理想，故 $(SaS] \subseteq T$ 或 $(SbS] \subseteq T$. 如果 $(SaS] \subseteq T$, 则

$$\begin{aligned}(I(a))^3 &= (a \cup Sa \cup aS \cup SaS]^3 \\ &\subseteq (Sa \cup SaS](a \cup Sa \cup aS \cup SaS] \\ &\subseteq (SaS] \subseteq T.\end{aligned}$$

从而

$$((I(a))^2]I(a) \subseteq ((I(a))^2 I(a)] \subseteq ((I(a))^3] \subseteq (T] = T.$$

因为 T 为弱素的，故 $((I(a))^2] \supseteq T$ 或 $I(a) \subseteq T$, 从而 $a \in T$. 若 $(SbS] \subseteq T$, 类似上面的证明可得 $b \in T$.

2) $\Longrightarrow$ 3) 设 $I(a)I(b) \subseteq T$, 则

$$(aSb] \subseteq ((a](Sb]] \subseteq (I(a)I(b)] \subseteq (T] = T,$$

故 $a \in T$ 或 $b \in T$.

3) $\Longrightarrow$ 4) 设 A, B 为 S 的右理想, $AB \subseteq T$, 如果 $A \nsubseteq T$, 存在 $a \in A, a \notin T$. 设 $b \in B$, 则 $I(a) \subseteq (A \cup SA]$, $I(b) \subseteq (B \cup SB]$. 故,

$$\begin{aligned}I(a)I(b) &\subseteq (A \cup SA](B \cup SB] \subseteq ((A \cup SA)(B \cup SB)] \\ &\subseteq (AB \cup SAB] \subseteq (T \cup ST] = T.\end{aligned}$$

因 $a \notin T$, 故 $b \in T$.

3) $\Longrightarrow$ 5), 4) $\Longrightarrow$ 1), 5) $\Longrightarrow$ 1) 和 6) $\Longrightarrow$ 1) 均显然.

3) $\Longrightarrow$ 6) 设 A 为 S 的右理想, B 为 S 的左理想, $AB \subseteq T, A \nsubseteq T$. 设 $a \in A\backslash T, b \in B$, 则 $I(a) \subseteq (A \cup SA], I(b) \subseteq (B \cup BS]$;

$$\begin{aligned} I(a)I(b) &\subseteq (A \cup SA](B \cup BS] \subseteq ((A \cup SA)(B \cup BS)] \\ &\subseteq (AB \cup ABS \cup SAB \cup SABS] \subseteq T. \end{aligned}$$

由 3) 知 $a \in T$ 或 $b \in T$. 因 $a \notin T$, 只有 $b \in T$. □

在以上定理中, 4),5),6) 这三款我们可以用以下对应三款取代:

4)$'$ 设 $a, b \in S, R(a)R(b) \subseteq T$, 则 $a \in T$ 或 $b \in T$;
5)$'$ 设 $a, b \in S, L(a)L(b) \subseteq T$, 则 $a \in T$ 或 $b \in T$;
6)$'$ 设 $a, b \in S, R(a)L(b) \subseteq T$, 则 $a \in T$ 或 $b \in T$.

定理 1.1.3 设 S 为序半群, T 为 S 的理想, 则 T 为素的当且仅当

$$(\forall a, b \in S)\ L(a)R(b) \subseteq T \Rightarrow a \in T \text{ 或 } b \in T.$$

证明 必要性是显然的.

充分性 设 $ab \in T$, 由假设及

$$\begin{aligned} L(a)R(b) &\subseteq (a \cup Sa](b \cup bS] \\ &\subseteq (ab \cup abS \cup Sab \cup SabS] \subseteq T, \end{aligned}$$

故 $a \in T$ 或 $b \in T$. □

不难看出, 上述定理可以重新叙述为: T 是素的当且仅当对 S 的任意左理想 A 与右理想 B, 如果 $AB \subseteq T$, 则 $A \subseteq T$ 或 $B \subseteq T$.

设 T 为序半群 S 的子集, T 称为半素的, 如果 $(\forall a \in S)\ a^2 \in T \Rightarrow a \in T$. T 称为弱素的, 如果对 S 的任意理想 A, $A^2 \subseteq T$, 则 $A \subseteq T$. 我们由定理 1.1.2 可以很类似地得到

定理 1.1.4 设 S 为序半群，T 为 S 的理想，则下列各款等价：

1) $(\forall a \in S)\ (aSa] \subseteq T \Rightarrow a \in T$;

2) $(\forall a \in S)\ (L(a))^2 \subseteq T \Rightarrow a \in T$;

3) $(\forall a \in S)\ (R(a))^2 \subseteq T \Rightarrow a \in T$;

4) T 为半素的.

素理想与弱素理想在序半群 S 的结构研究中起到很重要的作用，在以后的有关章节中将逐步阐述.

定理 1.1.5 设 S 为序半群，T 为 S 的理想，则

1) T 为弱素的当且仅当对 S 的任意理想 A, B, 如果 $(AB] \cap (BA] \subseteq T$, 则 $A \subseteq T$ 或 $B \subseteq T$.

2) T 为素的当且仅当 T 为半素且弱素的.

证明 1) 设 T 为弱素的，且对 S 的理想 A, B, $(AB] \cap (BA] \subseteq T$. 因为 $(AB], (BA]$ 为 S 的理想且

$$(AB](BA] \subseteq (AB] \cap (BA] \subseteq T,$$

故 $(AB] \subseteq T$ 或 $(BA] \subseteq T$. 如果 $(AB] \subseteq T$, 则 $AB \subseteq T$, 故 $A \subseteq T$ 或 $B \subseteq T$. 同理可证 $(BA] \subseteq T$ 的情形.

反之，设 A, B 为 S 的理想且 $AB \subseteq T$, 则

$$(AB] \cap (BA] \subseteq (AB] \subseteq (T] = T.$$

故 $A \subseteq T$ 或 $B \subseteq T$.

2) 设 T 为素理想，显然 T 为半素且弱素的. 反之，设 T 为半素且弱素的，且 $ab \in T$, 则

$$(bSa]^2 = (bSa](bSa] \subseteq (bSabSa] \subseteq (bSTSa] \subseteq T.$$

由 T 为半素的，得 $(bSa] \subseteq T$, 从而

$$(SbS](SaS] \subseteq (SbSSaS] \subseteq (SbSaS] \subseteq T.$$

故 $(SbS] \subseteq T$ 或 $(SaS] \subseteq T$. 假设 $(SaS] \subseteq T$, 则

$$(I(a))^3 \subseteq (SaS] \subseteq T.$$

故 $I(a) \subseteq T$, 从而 $a \in T$. 同理, 从 $(SbS] \subseteq T$ 可得 $b \in T$. □

设 S 为可换的序半群, 则 S 的弱素理想也是 S 的素理想. 事实上, 设 T 为弱素理想且 $ab \in T$, 那么

$$\begin{aligned} I(a)I(b) &= (a \cup Sa \cup aS \cup SaS](b \cup Sb \cup bS \cup SbS] \\ &\subseteq (ab \cup Sab] \subseteq (T] = T. \end{aligned}$$

故 $a \in T$ 或 $b \in T$.

下面我们来考虑 S 的每个理想均为素理想或均为弱素理想时, S 有什么样的特征.

定义 1.1.6 设 S 为序半群, S 称为内禀正则的 (intra-regular), 如果 $(\forall a \in S)\ a \in (Sa^2S]$, 即 $(\forall A \subseteq S)\ A \subseteq SA^2S]$; S 称为正则的 (regular), 如果 $(\forall a \in S)\ a \in (aSa]$; S 称为左 (右) 正则的, 如果 $(\forall a \in S)\ a \in (Sa^2]$ $((a^2S])$.

定理 1.1.7 序半群 S 的所有理想为弱素的当且仅当它们构成链且引理 0.3.5 中任一款成立.

证明 设 A, B 为 S 的理想, 因为 $(AB]$ 也为 S 的理想且 $AB \subseteq (AB]$, 故

$$A \subseteq (AB] \subseteq (SB] \subseteq B, \text{ 或 } B \subseteq (AB] \subseteq (AS] \subseteq A.$$

又因为 $A^2 \subseteq (A^2]$, 故 $A \subseteq (A^2]$. 显然 $(A^2] \subseteq (AS] \subseteq A$, 因此 $(A^2] = A$.

反之，设 A,B,T 是 S 的理想且 $AB\subseteq T$，我们有 $A\subseteq T$ 或 $B\subseteq T$. 事实上，因 $A\subseteq B$ 或 $B\subseteq A$，故由引理 0.3.5, $A=A\cap B=(AB]\subseteq(T]=T$，或 $B=A\cap B=(AB]\subseteq(T]=T$. □

定理 1.1.8 序半群 S 的所有理想为素的当且仅当它们构成链且 S 为内禀正则的.

证明 设 S 的每个理想均为素的，则 S 的每个理想为弱素的，由定理 1.1.7，它们构成链. 又 S 的每个理想也为半素的，故我们有

$$(\forall a\in S)\ a^4\in(Sa^2S]\Rightarrow a^2\in(Sa^2S]\Rightarrow a\in(Sa^2S].$$

反之，设 S 为内禀正则的，则 S 的每个理想是半素的. 事实上，设 T 为 S 的理想，且 $a^2\in T$，那么 $a\in(Sa^2S]\subseteq(STS]\subseteq T$. 由 S 的每个理想为半素，则

1) $I(x)=(SxS]$, $\forall x\in S$. 事实上，因为 $x^4\in(SxS]$，得 $x^2\in(SxS]$，进而 $x\in(SxS]$，故 $I(x)\subseteq(SxS]$. 显然，$(SxS]\subseteq I(x)$.

2) $I(xy)=I(x)\cap I(y)$, $\forall x,y\in S$. 事实上，$I(xy)\subseteq I(x)\cap I(y)$ 是显然的. 设 $t\in I(x)\cap I(y)$，由 1), $t\in(SxS], t\in(SyS]$，存在 $a,b,c,d\in S$ 使得 $t\leq axb, t\leq cyd$，则 $t^2\leq cydaxb$. 另一方面，

$$(ydax)^2=ydaxydax\in SxyS\subseteq I(xy),$$

故 $ydax\in I(xy)$，因此 $t^2\in I(xy)$，即 $t\in I(xy)$.

设 T 为 S 的理想且 $ab\in T$，则 $I(ab)=I(a)\cap I(b)\subseteq T$. 因为 $I(a)\subseteq I(b)$ 或 $I(b)\subseteq I(a)$, $I(a)\subseteq T$ 或 $I(b)\subseteq T$，即 $a\in T$ 或 $b\in T$. □

注 1.1.9 设 A 为序半群 S 的理想. 如果 S 为正则的, 则 $A = (A^2]$. 事实上, 显然 $(A^2] \subseteq A$, 又 $A \subseteq (ASA] \subseteq (A^2]$. 同理可证当 S 为内禀正则 (左正则、右正则) 时, 均有 $A = (A^2]$. 特别地有 $S^2 = S$.

命题 1.1.10 设 S 为正则序半群 (内禀、左、右正则), 则 S 的每个极大理想一定为弱素的.

证明 设 A,B 为 S 的理想, M 为 S 的极大理想且 $AB \subseteq M$. 因为 $A \cup M, B \cup M$ 为 S 的理想, 如果 $A \not\subseteq M, B \not\subseteq M$, 则 $A \cup M = B \cup M = S$.

$$\begin{aligned} S^2 = S &= (A \cup M)(B \cup M) \\ &= AB \cup AM \cup MB \cup M^2 \subseteq M, \end{aligned}$$

矛盾.

§2 m 系与拟素左理想

本节我们主要讨论序半群 S 的左理想的特性, 刻画一个左理想为弱素、拟素或弱拟素等的特征. 主要结果来自 [5].

定义 1.2.1 设 L 是序半群 S 的左理想, L 称为弱素的, 如果对 S 的任意理想 I_1, I_2 , $I_1I_2 \subseteq L$, 则 $I_1 \subseteq L$ 或 $I_2 \subseteq L$.

定义 1.2.2 设 L 是序半群 S 的左理想, L 称为拟素的, 如果对 S 的任意左理想 L_1, L_2 且 $L_1L_2 \subseteq L$, 则 $L_1 \subseteq L$ 或 $L_2 \subseteq L$. L 称为拟半素的, 如果对 S 的任意左理想 P 且 $P^2 \subseteq L$, 则 $P \subseteq L$.

定义 1.2.3 设 L 是序半群 S 的左理想, L 称为弱拟素的, 如果对 S 的任意左理想 L_1, L_2 且 $L_1L_2 \subseteq L$, $L \subseteq L_1, L_2$, 则 $L_1 = L$ 或 $L_2 = L$.

不难看出 S 的每个拟素左理想一定是弱素的和弱拟素的，但是这三个概念是互不等价的. 我们可举例来说明.

例 1.2.4 我们考虑序半群 $S=\{a,b,c,d,e\}$, 其乘法及序关系的定义如下：

.	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	a	a	a	a	a
c	a	a	c	c	e
d	a	a	c	d	e
e	a	a	c	c	e

$$\begin{aligned}\leq: \; = \; & \{(a,a),(a,c),(a,d),(a,e),(b,b),(b,c),(b,d),(b,e),\\ & (c,c),(c,d),(c,e),(d,d),(e,e)\}.\end{aligned}$$

则 S 的全体左理想为：$\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\};\{a,b,c,d\},\{a,b,c,e\}$ 和 S;

S 的全体右理想为： $\{a\},\{a,b\},\{a,b,c,e\}$ 和 S;

S 的全体理想为： $\{a\},\{a,b\},\{a,b,c,e\}$ 和 S;

不难看出 S 的左理想 $\{a,b,c\}$ 为 S 的弱素左理想，但它不是拟素和弱拟素的. 事实上，

$$\{a,b,c,e\}\{a,b,c,d\}=\{a,c\}\subseteq\{a,b,c\},$$

但

$$\{a,b,c,e\}\not\subseteq\{a,b,c\},\quad \{a,b,c,d\}\not\subseteq\{a,b,c\}.$$

而且

$$\{a,b,c,e\}\supset\{a,b,c\},\quad \{a,b,c,d\}\supset\{a,b,c\}.$$

例 1.2.5 我们考虑序半群 $S=\{a,b,c,d,e,f\}$, 它的乘法及序关系的定义如下：

.	a	b	c	d	e	f
a	d	e	d	d	e	d
b	d	e	d	d	e	d
c	d	e	d	d	e	d
d	d	e	d	d	e	d
e	d	e	d	d	e	d
f	a	b	c	d	e	f

$$\begin{aligned}\leq: \ = \ & \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(d,c),(d,f),(d,a),(e,e),\\ & (e,b),(e,f),(e,d),(e,c),(e,a),(f,f)\}.\end{aligned}$$

$\{d,e,f\}$ 是 S 的左理想. S 的所有真包含 $\{d,e,f\}$ 的左理想为:

$$\begin{aligned} L_1 &= \{a,d,e,f\}; \quad L_2=\{b,d,e,f\};\\ L_3 &= \{c,d,e,f\}; \quad L_4=\{b,c,d,e,f\};\\ L_5 &= \{a,c,d,e,f\}; \quad L_6=\{a,b,d,e,f\};\\ L_7 &= S.\end{aligned}$$

我们可以证明 $L_iL_j \not\subseteq \{d,e,f\} \quad (i,j=1,2,3,4,5,6,7)$. 事实上, 因为 $i,j\in\{1,2,3,4,5,6,7\}$, 我们有 $f\in L_i$, 且存在 $x\in\{a,b,c\}$ 使得 $x\in L_j$. 不难看出 $fx=x\in L_iL_j$ 但 $x\notin\{d,e,f\}$. 因此 $L=\{d,e,f\}$ 是 S 的弱拟素左理想, 但 $L=\{d,e,f\}$ 不是拟素的. 因为 $\{c,d,e\}$ 是 S 的左理想且 $\{c,d,e\}^2\subseteq\{d,e,f\}$, 但 $\{c,d,e\}\not\subseteq\{d,e,f\}$.

一个序半群 S 称为左 duo (右 duo), 如果 S 的任意一个左理想 (右理想) 是 S 的右理想 (左理想). 我们不难证明下面的命题.

命题 1.2.6 设 S 是序半群. 如果 S 是左 duo 或可换的, 或 S 的所有的左理想关于集合的包含关系构成链, 则弱素、拟素和弱拟素三个概念是等价的.

为了进一步刻画这三类素左理想，我们引入以下概念.

定义 1.2.7 设 M 是序半群 S 的一个非空子集， M 称为 m 系，如果

$$\forall a, b \in M,\ \exists x \in S:\ (axb] \cap M \neq \emptyset.$$

可以看出序半群 S 的 m 系的定义是一般半群 m 系定义的推广.

定义 1.2.8 设 L 为序半群 S 的左理想， M 为 S 的非空子集， (M, L) 称为 S 的弱 m 系，如果 $L \cap M = \emptyset$ 且

$$(\forall m, n \in M) \quad ((m \cup L)S(n \cup L)] \cap M \neq \emptyset.$$

设 M 为 m 系， L 为 S 的左理想，且 $L \cap M = \emptyset$. 则对任意 $m, n \in M$, 存在 $x \in S$ 使得 $(mxn] \cap M \neq \emptyset$. 故

$$((m \cup L)S(n \cup L)] \cap M \neq \emptyset.$$

命题 1.2.9 设 L 为序半群 S 的左理想， M 为 S 的非空子集，使得 (M, L) 为弱 m 系. 如果 P 为 S 的包含 L 且 $P \cap M = \emptyset$ 的极大的左理想，则 P 为 S 的弱拟素左理想

证明 设 L_1, L_2 为 S 的左理想，且 $P \subseteq L_1, L_2$, $L_1 L_2 \subseteq P$. 则 $P = L_1$ 或 $P = L_2$.

如果 $P \neq L_1$ 且 $P \neq L_2$, 则存在 $a \in L_1 \backslash P$, $b \in L_2 \backslash P$, 使得

$$P \subset P \cup L(a) \subseteq L_1, \quad P \subset P \cup L(b) \subseteq L_2.$$

由假设

$$(P \cup L(a)) \cap M \neq \emptyset, \quad P \subset (P \cup L(b)) \cap M \neq \emptyset.$$

取 $m_1 \in (P \cup L(a)) \cap M$, $m_2 \in (P \cup L(b)) \cap M$. 则

$$\begin{aligned}
((m_1 \cup L)S(m_2 \cup L)] &\subseteq ((L_1 \cup L)S(L_2 \cup L)] \\
&\subseteq (L_1 S L_2 \cup L_1 S L \cup L S L_2 \cup L S L] \\
&\subseteq (L_1 S L_2] \\
&\subseteq (L_1 L_2] \subseteq (P] = P.
\end{aligned}$$

结果 $((m_1 \cup L)S(m_2 \cup L)] \cap M \subseteq P \cap M = \emptyset$, 和 (M, L) 为弱 m 系矛盾. □

定理 1.2.10 设 L 为序半群 S 的左理想, 则下列各款等价:

1) L 为弱拟素的;

2) 设 L_1, L_2 为 S 的左理想, $(L \cup L_1)(L \cup L_2) \subseteq L$, 则 $L_1 \subseteq L$ 或 $L_2 \subseteq L$.

3) 设 L_1, L_2 为 S 的左理想且 $L \subseteq L_1$, $L_1 L_2 \subseteq L$, 则 $L_1 = L$ 或 $L_2 \subseteq L$.

4) 设 L_1, L_2 为 S 的左理想且 $(L_1 \cup L)L_2 \subseteq L$, 则 $L_1 \subseteq L$ 或 $L_2 \subseteq L$.

5) 设 $a, b \in S$, $((a \cup L)S(b \cup L)] \subseteq L$, 则 $a \in L$ 或 $b \in L$.

6) $(S \backslash L, L)$ 是弱 m 系.

定理 1.2.11 设 S 为序半群, L 为 S 的真左理想, 则下列各款等价:

1) L 为拟素的.

2) 设 $a, b \in S$ 且 $(aSb] \subseteq L$, 则 $a \in L$ 或 $b \in L$.

3) $S \backslash L$ 为 m 系.

以上二个定理的证明作为练习. □

设 L 为 S 的左理想, 令 $I(L) := \{x \in S \mid Lx \subseteq L\}$, $I(L)$ 称为 L 的理想化子. 容易验证 $I(L)$ 为 S 的子半群, L 为 $I(L)$ 的理想. 设 T 为 S 的子半群, 且 L 为 T 的理想, 则 $T \subseteq I(L)$.

又记 $i(L) := \{x \in L \mid xS \subseteq L\}$. 如果 $i(L) \neq \emptyset$, 则 $i(L)$ 为 S 的包含在 L 中的最大理想.

命题 1.2.12 设 S 为序幺半群, L 为 S 的弱拟素左理想, 则如果 $i(L) \neq \emptyset$, $i(L)$ 是 S 的弱拟素理想.

证明 设 $a, b \in S$, $(aSb] \subseteq i(L)$. 则

$$(SaS](SbS] \subseteq (S(aSb)S] \subseteq (Si(L)S] \subseteq (SL] \subseteq (L] = L.$$

由假设 $(SaS] \subseteq L$ 或 $(SbS] \subseteq L$. 如果 $(SaS] \subseteq L$, 由 $i(L)$ 是包含在 L 中的最大的 S 的理想, 故 $(SaS] \subseteq i(L)$, 从而 $a = 1 \cdot a \cdot 1 \in (SaS] \subseteq i(L)$. 同理, 如果 $(SbS] \subseteq i(L)$, 可证 $b \in i(L)$. 由定理 1.1.2 得 $i(L)$ 为 S 的弱拟素理想. □

定理 1.2.13 设 S 为序幺半群且 L 为 S 的左理想但不为 S 的理想. 则下列各款等价:

1) L 为弱拟素的.

2) L_1 为 S 的左理想且 $LL_1 \subseteq L$, 则 $L_1 \subseteq L$.

3) 设 $a \in S$ 且 $L(Sa] \subseteq L$, 则 $a \in L$.

4) L 是包含在 $I(L)$ 中的 S 的最大左理想.

证明 1) $\Longrightarrow$ 2) 设 $LL_1 \subseteq L$. 则 $(LS]L_1 \subseteq (L(SL_1]] \subseteq (LL_1] \subseteq (L] = L$. 因 $(LS]$ 为 S 的理想且 $L \subset (LS]$, 故 $L \subset (LS]$. 由定理 1.2.10 中 1) $\Longrightarrow$ 3) 得 $L_1 \subseteq L$.

2) $\Longrightarrow$ 3) 设 $a \in S$, 由 2), $(Sa] \subseteq L$, 故 $a \in (Sa] \subseteq L$.

3) $\Longrightarrow$ 4) 因为 $L \subseteq I(L)$. 设 K 为 S 的左理想且 $K \subseteq I(L)$, 又设 $a \in K$, 则

$$L(Sa] \subseteq L(SK] \subseteq L(K] = LK \subseteq LI(L) \subseteq L.$$

由 3), $a \in L$.

4) $\Longrightarrow$ 1) 设 L_1, L_2 为 S 的左理想, $L \subseteq L_1, L_2$ 且 $L_1L_2 \subseteq L$, 则 $L_2 = L$. 事实上, 因为 $LL_2 \subseteq L_1L_2 \subseteq L$, 故 $L_2 \subseteq I(L)$, 因此 $L_2 \subseteq L$. 又 $L \subseteq L_2$, 故 $L_2 = L$, 所以 L 为弱拟素. □

在引理 0.3.5 中, 给出了每个理想均幂等的序半群的刻画. 本节最后我们通过拟素左理想给出每个左理想均为幂等的刻画.

定理 1.2.14 设 S 为序半群, 则下列各款等价:

1) S 的所有左理想是幂等的;

2) 设 L_1, L_2 为 S 的左理想且 $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$, 那么 $L_1 \cap L_2 \subseteq$

$(L_1L_2]$;

3) $L(a)=((L(a))^2],\quad \forall a\in S$;

4) $a\in(SaSa]$, $\forall a\in S$;

5) S 的每个左理想是拟半素的;

6) S 的每个左理想是 S 的包含它的所有拟素左理想的交.

证明 1) $\Longrightarrow$ 2), 2) $\Longrightarrow$ 3) 和 3) $\Longrightarrow$ 4) 类似于引理 0.3.5 的证明.

4) $\Longrightarrow$ 5) 设 L 为左理想, 对 S 的任一左理想 P, 如果 $P^2\subseteq L$, 则 $\forall a\in P$, 由 4),

$$a\in(SaSa]\subseteq(SPSP]\subseteq(P^2]\subseteq(L]=L.$$

5) $\Longrightarrow$ 6) 设 L 为 S 的左理想. 令

$$\mathcal{M}=\{K\mid K\text{ 为 }S\text{ 的拟素左理想},\quad K\supseteq L\}.$$

显然 $L\subseteq K,\forall K\in\mathcal{N}$, 从而 $L\subseteq\bigcap_{K\in\mathcal{N}}K$. 如果存在 $a\in\bigcap_{K\in\mathcal{N}}K$, $a\notin L$, 令

$$\mathcal{B}:=\{P\mid P\text{ 为 }S\text{ 的左理想},\quad P\supseteq L,a\notin P\}.$$

由于 $L\in\mathcal{B}$, 故 $\mathcal{B}\neq\emptyset$. 由 Zorn 引理 $\mathcal{B}$ 中存在极大元 $P_{\max}$. 我们下面证 $P_{\max}$ 为 S 的拟素左理想. 设 $b,c\in S$ 且 $(bSc]\subseteq P_{\max}$. 如果 $b\notin P_{\max}$,$c\notin P_{\max}$, 则 $a\in L(b)$, 即 $L(a)\subseteq L(b)$. 事实上, 如果 $a\notin L(b)$, 则 $a\notin L(b)\cup P_{\max}$, 且 $L(b)\cup P_{\max}$ 真包含 $P_{\max}$, 这不可能. 同理可证 $L(a)\subseteq L(c)$. 因为

$$\begin{aligned}(L(a))^2&\subseteq((L(a))^2]\subseteq(L(b)L(c)],\\(L(b))^2&\subseteq((L(b))^2]\subseteq((b\cup Sb](b\cup Sb]]\\&\subseteq(b^2\cup bSb\cup Sb^2\cup SbSb]\subseteq(Sb],\\(L(c))^2&\subseteq((L(c))^2]\subseteq((c\cup L(c)](c\cup L(c)]]\\&\subseteq(c^2\cup cSc\cup Sc^2\cup ScSc]\subseteq(Sc],\end{aligned}$$

由假设, $L(b)\subseteq(Sb]$, $L(c)\subseteq(Sc]$, $L(a)\subseteq(L(b)L(c)]$. 因此

$$a\in L(a)\quad\subseteq\quad(L(b)L(c)]$$

$$\begin{aligned} &\subseteq ((Sb](Sc]] = (SbSc] \\ &\subseteq (SP_{\max}] \subseteq P_{\max}, \end{aligned}$$

矛盾. 故 $P_{\max}$ 是 S 的拟素理想. 又 $P_{\max} \in \mathcal{M}$, 这也是矛盾的, 故 $L = \bigcap_{K \in \mathcal{N}} K$.

6) $\Longrightarrow$ 1) 设 L 为 S 的左理想, 令

$\mathcal{A} := \{K \mid K$ 为 S 的拟素左理想, $K \supseteq (L^2]\}$.

由 6), $(L^2] = \bigcap_{K \in \mathcal{A}} K$. 因 $L^2 \subseteq (L^2] \subseteq K, \forall K \in \mathcal{A}$, 故有 $L \subseteq K, \forall K \in \mathcal{A}$. 结果

$$L \subseteq \bigcap_{K \in \mathcal{A}} K = (L^2],$$

故 $L = (L^2]$. □

在有单位元的环 R 中, 有这样的结论: R 为单环当且仅当 R 的每个左理想是素的 [6]. 在序半群中有没有类似的结论呢? 现在还没有完全的解决.

§3 滤子与 Green 关系

在本节中, 我们讨论序半群的滤子, 特别是一个元生成的滤子以及序半群的 Green 关系.

定义 1.3.1 设 S 为一序半群, S 的一个子半群 F 称为 S 的滤子, 如果 F 满足: 1) $a, b \in F, ab \in F \Rightarrow a \in F$ 且 $b \in F$; 2) $a \in F, a \leq c \in S \Rightarrow c \in F$.

定理 1.3.2 设 S 为序半群, $\emptyset \neq F \subseteq S$, 则下列各款等价:

1) F 为 S 的滤子;

2) $S \backslash F$ 为 S 的素理想;

证明 略. □

设 I 为 S 的素理想，我们定义 S 上的二元关系

$$\sigma_I: \ = \{(x,y) \mid (x,y \in I) \bigvee (x,y \notin I)\}.$$

不难验证 σ_I 为 S 上的半格同余.

设 $N(x)$ 为 S 中 x 生成的滤子，定义 S 上的二元关系

$$\mathcal{N}: \ = \{(x,y) \mid N(x) = N(y)\}.$$

显然 $\mathcal{N}$ 为 S 的等价关系且

命题 1.3.3 设 S 为序半群，则下列几款成立：

(1) $\mathcal{N}$ 是 S 的半格同余；

(2) $\mathcal{N} = \bigcap\{\sigma_I | I \in \mathcal{T}(S)\}$, 这里 $\mathcal{T}(S)$ 是 S 的素理想集.

证明 (1) 设 $(x,y) \in \mathcal{N}, z \in S$. 因为 $zx \in N(zx)$, 有 $z,x \in N(zx)$, 从而 $y \in N(y) = N(x) \subseteq N(zx)$. 因 $z,y \in N(zx)$, 得 $N(zy) \subseteq N(zx)$. 对称地， $N(zx) \subseteq N(zy)$ 成立. 故 $(zx,zy) \in \mathcal{N}$. 同理可证， $(xz,yz) \in \mathcal{N}$.

设 $x \in S$, 因为 $x^2 \in N(x^2)$, 则 $x \in N(x^2)$, 从而 $N(x) \subseteq N(x^2)$. 又 $x^2 \in N(x)$, 故 $N(x^2) \subseteq N(x)$. 我们有 $(x,x^2) \in \mathcal{N}$, 又 $xy \in N(xy)$, 则 $x,y \in N(xy)$, 因此 $N(yx) \subseteq N(xy)$, 同理可证 $N(xy) \subseteq N(yx)$, 故 $N(xy) = N(yx)$. 由 $\mathcal{N}$ 的定义, $(xy,yx) \in \mathcal{N}$.

(2) 设 $(x,y) \in \mathcal{N}, I \in \mathcal{T}(S)$. 如果 $(x,y) \notin \sigma_I$, 则 $x \notin I, y \in I$ 或 $x \in I, y \notin I$. 如果 $x \notin I$, 则 $x \in S \backslash I$. 由于 $S \backslash I$ 为滤子，故 $x \in N(x) \subseteq S \backslash I$. 因为 $N(x) = N(y)$, 所以 $y \in N(y) \subseteq S \backslash I$, 得出 $y \notin I$ ，矛盾. 同理可证 $y \notin I, x \in I$ 的情形不成立.

另一方面，设 $(x,y) \in \sigma_I, \forall I \in \mathcal{T}(S)$. 如果 $(x,y) \notin \mathcal{N}$, 则 $x \notin N(y)$ 或 $y \notin N(x)$. 设 $x \notin N(y)$, 则 $x \in S \backslash N(y)$. 因为 $S \backslash N(y)$ 为 S 的素理想且 $y \notin S \backslash N(y)$, 由 σ_I 的定义可得 $(x,y) \notin \sigma_{S \backslash N(y)}$, 矛盾. □

设 S 为序半群， S 上的 Green 关系是 S 上的如下二元关

系:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}: &= \{(x,y) \mid R(x)=R(y)\};\\ \mathcal{L}: &= \{(x,y) \mid L(x)=L(y)\};\\ \mathcal{T}: &= \{(x,y) \mid I(x)=I(y)\};\\ \mathcal{H}: &= \mathcal{R}\cap\mathcal{L}.\end{aligned}$$

命题 1.3.4 设 S 为序半群, 则下列各款成立:

1) $\mathcal{R}(\mathcal{L})$ 是 S 的左同余 (右同余);

2) 设 $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{M}$ 分别表示 S 的右理想集、左理想集、理想集, 则

$$\mathcal{R} = \bigcap\{\sigma_I \mid I\in\mathcal{A}\},\ \mathcal{L} = \bigcap\{\sigma_I \mid I\in\mathcal{B}\},$$

$$\mathcal{T} = \bigcap\{\sigma_I \mid I\in\mathcal{M}\}.$$

3) $\mathcal{H}\subseteq\mathcal{R}\subseteq\mathcal{T}\subseteq\mathcal{N}, \mathcal{H}\subseteq\mathcal{L}\subseteq\mathcal{T}\subseteq\mathcal{N}$;

4) 设 A,B,I 分别为 S 的右理想、左理想及理想, 则

$$A = \cup\{(x)_{\mathcal{R}} \mid x\in A\},\ B = \cup\{(x)_{\mathcal{L}} \mid x\in B\},$$

$$I = \cup\{(x)_{\mathcal{T}} \mid x\in I\}.$$

证明 1) 显然 $\mathcal{R}$ 是 S 上的等价关系, 设 $(x,y)\in\mathcal{R}$, $c\in S$, 则

$$\begin{aligned}R(cx) &= (cx\cup cxS]\subseteq(c](x\cup xS] = (c](y\cup Sy]\\ &\subseteq (cy\cup cyS] = R(cy).\end{aligned}$$

类似地, 可证 $R(cy)\subseteq R(cx)$.

2) 设 $(x,y)\in R$, 如果存在 $I\in\mathcal{A}$, 使得 $(x,y)\in\sigma_I$, 则有 $x\in I, y\notin I$ 或 $x\notin I, y\in I$. 设 $x\in I, y\notin I$, 那么

$$R(y) = R(x) = (x\cup xS]\subseteq I\Rightarrow y\in I,$$

不可能. 同理 $x \in I, y \notin I$, 也不成立. 故 $\mathcal{R} \subseteq \bigcap\{\sigma_I \mid I \in \mathcal{A}\}$. 反之, 设 $(x,y) \in \bigcap\{\sigma_I \mid I \in \mathcal{A}\}$, 则 $(x,y) \in \sigma_{R(x)}$, 有 $y \in R(x)$, 即 $R(y) \subseteq R(x)$. 同理, 从 $(x,y) \in \sigma_{R(y)}$, 得 $x \in R(y)$, 故 $R(x) \subseteq R(y)$. 2) 中的另外二个等式可类似得出.

3) 由 2) 和命题 1.1.3 不难看出

$$\mathcal{H} \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{N}, \quad \mathcal{H} \subseteq \mathcal{L} \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{N}.$$

4) 设 A 为 S 的右理想, 则 $x \in (x)_{\mathcal{R}} \subseteq \bigcup\{(x)_{\mathcal{R}} \mid x \in A\}$. 又设 $y \in \bigcup\{(x)_{\mathcal{R}} \mid x \in A\}$, 存在 $x \in A$ 使得 $y \in (x)_{\mathcal{R}}$, 即 $R(x) = R(y)$, 故 $y \in R(x) \subseteq A$. 同理可证另二种情形. □

一个序半群 S 称为左 (右) 单的, 如果 S 仅包含一个 $\mathcal{R}(\mathcal{L})$ 类. S 称为单的, 如果 S 仅含一个 $\mathcal{T}$ 类. 我们不难证明 S 为左 (右) 单的当且仅当 $(Sa] = S \ \ ((aS] = S), \forall a \in S$. S 为单的当且仅当 $(SaS] = S, \ \ \forall a \in S$.

下面我们主要讨论 S 的一个元素 x 生成的滤子 $N(x)$.

定理 1.3.5 序半群 S 为内禀正则的当且仅当

$$(\forall x \in S) \ \ N(x) = \{y \in S \mid x \in (SyS]\}.$$

证明 设 $x \in S$, S 为内禀正则的, 令

$$T: \ = \{y \in S \mid x \in (SyS]\},$$

则 $x \in (Sx^2S] \subseteq (SxS]$, 故 $x \in T$. 设 $y, z \in T$, 则

$$\begin{aligned} x \in (Sx^2S] &\subseteq (S(SyS](SzS]S] \subseteq (SySzS] \\ &\subseteq (S(S(ySz)^2S]S] \subseteq (SySzySzS] \\ &\subseteq (SzyS]. \end{aligned}$$

故 $zy \in T$. 又设 $yz \in T$, 则 $x \in (SyzS] \subseteq (SyS], (SzS]$. 因此 $y \in T, z \in T$. 设 $y \in T, z \in S$ 且 $y \leq z$, 则

$$x \in (SyS] \subseteq (SzS],$$

从而 $z \in T$. 反之, 因为 $x \in N(x)$, 则 $x^2 \in N(x)$, 故 $x \in (Sx^2S]$.

□

推论 1.3.6 一个序半群是内禀正则的当且仅当 $\mathcal{N} = \mathcal{J}$.

证明 必要性 设 S 为内禀正则的, 由定理 1.3.5, 设 $(x, y) \in \mathcal{N}$, 则 $x \in N(y)$, 故有 $y \in (SxS] \subseteq I(x)$; 同理, 由 $y \in N(x)$ 得 $x \in I(y)$, 故 $I(x) = I(y)$, 即 $(x, y) \in \mathcal{J}$.

反之, 设 $(x, y) \in \mathcal{J}$, 则 $x \in I(y) = (S^1yS]$, 又 $y \in (Sy^2S]$, 故有

$$x \in (S^1(Sy^2S]S^1] \subseteq (Sy^2S] \subseteq (SyS].$$

由定理 1.3.5, $y \in N(x)$; 对称地, 可证 $x \in N(y)$.

充分性 设 $x \in S$, 因为 $(x, x^2), (x^2, x^4) \in \mathcal{N}$, 故 $(x, x^2) \in \mathcal{J}$, $(x^2, x^4) \in \mathcal{J}$, 即 $I(x) = I(x^2) = I(x^4)$. 因此

$$x \in (S^1x^2S^1] = (S^1x^4S^1] = (S^1xx^2xS^1] \subseteq (Sx^2S]. \quad □$$

定理 1.3.7 设 S 为序半群, 则 S 的每个左理想是半素且 S 为左 duo 的当且仅当

$$N(x) = \{y \in S \mid x \in (Sy]\}.$$

证明 必要性 设 $x \in S$,

$$T := \{y \in S \mid x \in (Sy]\}.$$

因为 $x^2 \in (Sx]$, 故 $x \in (Sx]$, 从而 $x \in T$. 设 $y, z \in T$, 则 $x \in (Sy], (Sz]$. 故 $x^2 \in (Sy](Sz]$. 又 S 为左 duo 的, 则

$$x^2 \in (Sy](Sz] \subseteq ((SyS]z] \subseteq ((Sy]z] = (Syz],$$

因此 $x \in (Syz]$, 从而 $yz \in T$. 又设 $yz \in T$, 则 $x \in (Syz] \subseteq (Sz]$, 则 $z \in T$. 另一方面 $(Sy]z \subseteq (Sy]$, 故

$$x \in (Syz] = ((Sy]z] \subseteq (Sy].$$

因此 $y \in T$.

如果 $y \in T, y \leq z \in S$, 则显然 $x \in (Sy] \subseteq (Sz]$, 有 $z \in T$.

设 F 为包含 x 的滤子, $\forall y \in T$, 有 $x \in (Sy]$, 存在 $s_1 \in S$, 使得 $x \leq s_1 y$, 故 $s_1 y \in F$, 从而 $y \in F$.

充分性　设 L 为 S 的左理想, 且 $x^2 \in L$, 因为 $x^2 \in N(x)$, 即 $x \in (Sx^2] \subseteq L$. 又 $\forall y \in L, s \in S$, 则 $sy \in N(ys) = N(sy)$, 故 $ys \in (Ssy] \subseteq (Sy] \subseteq L$, 即 $LS \subseteq L$. □

推论 1.3.8　设 S 为左 duo 的, 则 S 的且每个左理想为半素的当且仅当 $\mathcal{N} = \mathcal{L}$.

证明　必要性　设 $(x, y) \in \mathcal{N}$, 有 $x \in N(y), y \in N(x)$, 即

$$y \in (Sx] \subseteq L(x), x \in (Sy] \subseteq L(y),$$

故 $(x, y) \in \mathcal{L}$. 反之, 设 $(x, y) \in \mathcal{L}$, 则 $x \in (S^1 y]$. 又因为 $y^2 \in (Sy]$, 故 $y \in (Sy]$, 因此 $x \in (S^1(Sy]] \subseteq (Sy]$, 即 $y \in N(x)$. 同理可证 $x \in N(y)$, 得 $(x, y) \in \mathcal{N}$.

充分性　设 $y^2 \in L, L$ 为 S 的左理想, 因为 $(y, y^2) \in \mathcal{N}$, 则 $(y, y^2) \in \mathcal{L}$, 故 $y \in (S^1 y^2] \subseteq (S^1 L] = L$. 又 $\forall x \in S, a \in L, (ax, xa) \in \mathcal{N}$, 有 $(ax, xa) \in \mathcal{L}$, 从而 $ax \in (S^1 xa] \subseteq (Sa] \subseteq L$, 即 $LS \subseteq L$. □

类似地我们可得出

定理 1.3.9　设 S 为右 duo 的, 则 S 的且每个右理想为半素的当且仅当 $\mathcal{N} = \mathcal{R}$, 当且仅当 $N(x) = \{y \mid y \in (yS]\}$.

定理 1.3.10　设 S 为 duo 的, 则 S 的每个理想为半素的

当且仅当

$$N(x) = \{y \in S \mid x \in (ySy]\}.$$

证明 必要性 由定理 1.3.7 和定理 1.3.9,

$$N(x) = \{y \in S \mid x \in (Sy]\} = \{y \in S \mid x \in (yS]\},$$

设 $y \in N(x)$, 则 $x^2 \in (ySy]$. 这是因为

$$(ySy]S \subseteq (y(Sy]S] \subseteq (y(Sy]] = (ySy].$$

同理 $S(ySy] \subseteq (S(yS]y] \subseteq ((yS]y] = (ySy]$. 故 $(ySy]$ 为 S 的理想, 再由假设得 $x \in (ySy]$. 反之又设 $x \in (ySy]$, 则 $x \in (yS]$, 从而 $x \in N(x)$.

充分性 设 L 为 S 的左理想, $x^2 \in L$, 则从 $(x, x^2) \in \mathcal{N}$, 得 $x \in (x^2Sx^2] \subseteq L$. $\forall a \in L, s \in S$, 从 $(as, sa) \in \mathcal{N}$ 得 $as \in (saSsa] \subseteq (Sa] \subseteq L$. 同理可证 S 的右理想 R 的情形. □

推论 1.3.11 S 为 duo 的且每个理想为半素的当且仅当 $\mathcal{N} = \mathcal{H}$.

§4 C 左理想

在第二节的基础上, 本节我们讨论一类特殊的左理想, C 左理想. 主要结果来自 [7].

定义 1.4.1 设 L 为序半群 S 的左理想, 如果 $L \subseteq (S(S-L)]$, 称 L 为 S 的 C 左理想.

设 S 为序半群且包含最大元 e, $e^2 = e$, 则 S 的每个真左理想 L 均为 C 左理想. S 本身不为 S 的 C 左理想. 在例 2.2.2 中, $L_1 = \{a, b, d\}$ 为 S 的左理想但不为 C 左理想, $L_2 = \{d\}$ 是 S 的 C 左理想.

S 称为 C 左单的, 如果 S 不含 C 左理想.

命题 1.4.2 设 S 为可换非左单的序半群，则 S 中一定含有 C 左理想.

证明 设 T 为 S 的真左理想，则

$$\emptyset \neq M = (TS(S-T)] \subseteq T \cap (S(S-T)].$$

M 为 C 左理想. 因为 $S-T \subseteq S-M$，故 $(S(S-T)] \subseteq (S(S-M)]$. □

定理 1.4.3 设 S 为其两个真左理想 M_1, M_2 的并，即 $S = M_1 \cup M_2$，则 M_1, M_2 均不为 S 的 C 左理想.

证明 由定义可直接推出. □

由此定理我们可以得到

推论 1.4.4 序半群 S 如果包含多于一个的极大左理想，则这些极大左理想均不为 C 左理想；换句话说，S 的一个极大左理想 L 为 C 左理想，则必为最大左理想.

命题 1.4.5 设 S 为序半群，S 中包含最大真左理想 L^*，则存在 $a \in S-(S^2]$ 使得 $L^* \supseteq S-[a)$ 或 L^* 为 C 左理想.

证明 设 L^* 为 S 的最大真左理想，则

$$(S(S-L^*)] \subseteq L^* \quad 或 \quad S = (S(S-L^*)].$$

如果 L^* 不是 C 左理想，必有 $(S(S-L^*)] \subset L^*$. 从而

$$(S^2] = (S(S-L^*) \cup SL^*] \subseteq ((S(S-L^*)] \cup (SL^*]] \subseteq L^*,$$

因此，$S \neq (S^2]$. 取 $a \in S-(S^2]$，则 $S-[a)$ 为 S 的左理想. 事实上，$\forall b \in S-[a)$ 且 $x \in S$，则 $xb \in S-[a)$. 否则 $xb \in [a)$，即 $a \leq xb \in (S^2]$，矛盾. 又设 $c \in S-[a)$. 由于 L^* 为 S 的最大左理想，因此 $S-[a) \subseteq L^*$. □

结合推论 1.4.4 和命题 1.4.5，我们有

命题 1.4.6 设 S 为半群，L 为 S 的极大左理想. 则 L 为 C 左理想当且仅当 L 是 S 的最大真左理想.

证明留作练习.

定理 1.4.7 序半群 S 的所有 C 左理想关于集合的并、交运算构成 S 的左理想格的子格.

证明 设 L_1, L_2 为 S 的两个 C 左理想. 容易验证 $L_1 \cap L_2$ 也为 C 左理想. 因为 $S-(L_1 \cup L_2) \neq \emptyset$, 且 $\forall x \in L_1$, 存在 $a \in S$, $y \in S - L_1$ 使得 $x \leq ay$.

1) 如果 $y \in S - (L_1 \cup L_2)$, 那么 $x \in (S(S-(L_1 \cup L_2))]$.

2) 如果 $y \in S - L_1$ 且 $y \in L_2$, 存在 $z \in S - L_2, b \in S$ 使得 $y \leq bz$ 且 $z \notin L_1$. 否则 $y \in L_1$, 矛盾. 由上得 $x \leq ay \leq abz$ 且 $z \in S - (L_1 \cup L_2)$, 故

$$x \in (S^2(S-(l_1 \cup L_2))] \subseteq (S(S-(L_1 \cup L_2))].$$

从而 $L_1 \subseteq (S(S-(L_1 \cup L_2))]$. 同理可证 $L_2 \subseteq (S(S-(L_1 \cup L_2))]$, 即 $L_1 \cup L_2 \subseteq (S(S-(L_1 \cup L_2))]$. □

最大 C 左理想在一个序半群中的存在性问题也是十分有趣的问题. 我们可以通过 S 的左基的概念给出 S 的最大 C 左理想的存在性刻画. S 的一个子集 A 称为 S 的左基, 如果 1)$(A \cup SA] = S$; 2) 不存在 A 的真子集 B 使得 $(B \cup SB] = S$. 关于这部分内容读者可参见 [4,7,8].

本节最后我们刻画两类序半群.

定理 1.4.8 设 S 为非左单的序半群，则 S 的每个真左理想均为 C 左理想当且仅当 S 满足下述二条件之一：

1) S 中包含最大真左理想 L^* 且为 C 左理想;

2) $S = (S^2]$, 而且对任意真左理想 L 与 $a \in L$, 存在 $b \in S - L$ 使 $L(a) \subset L(b)$.

证明 必要性　设 S 的每个真左理想为 C 左理想，则由定

理 1.4.3, S 中最多含一个极大左理想. 设 L 为极大左理想, 我们可证 $S-L$ 为 S 的 $\mathcal{L}$ 类, 即存在 $a\in S$ 使得 $(a)_{\mathcal{L}}=S-L$ 且为 S 的极大 $\mathcal{L}$ 类; 反之设 L 为 S 的左理想且 $S-L$ 为 S 的极大 $\mathcal{L}$ 类, 则 L 一定为 S 的极大左理想.

1) 如果 S 中含极大 $\mathcal{L}$ 类 $(a)_{\mathcal{L}}$, 且 $S-(a)_{\mathcal{L}}$ 为 S 的惟一极大左理想. 则它一定是最大真左理想, 由假设它为 C 左理想.

2) 如果 S 不含极大 $\mathcal{L}$ 类, 则 $S=(S^2]$. 否则取 $x\in S-(S^2]$, 则 $L(x)\neq S$(如果 $L(x)=S$, 则 $(x)_{\mathcal{L}}$ 为极大 $\mathcal{L}$ 类). 因为 $L(x)$ 为 S 的 C 左理想, 故有

$$x\in L(x)\subseteq(S(S-L(x))]\subseteq(S^2],$$

矛盾. 设 L 为 S 的任一真左理想, $\forall a\in L$, 有

$$a\in L(a)\subseteq L\subseteq(S(S-L)].$$

所以存在 $b\in S-L$ 使得 $a\in(Sb]\subseteq L(b)$, 即 $L(a)\subseteq L(b)$. 因为 $b\notin L$, 故 $L(a)\subset L(b)$.

充分性 如果 1) 成立, 设 L 为 S 的任一真左理想, 则 $L\subseteq L^*\subseteq(S(S-L^*)]\subseteq(S(S-L)]$. 所以 L 为 C 左理想.

如果 2) 成立, 设 L 为 S 的任一真左理想, $\forall a\in L$, 存在 $b\in S-L$ 使 $L(a)\subset L(b)$. 由 $S=(S^2]$, 存在 $d\in S$ 使得 $b\in(Sd]$, 即 $L(a)\subset L(b)\subseteq(Sd]$. 因为 $b\notin L$, 故 $d\notin L$. 因此 $L(a)\subseteq(Sd]\subseteq(S(S-L)]$. 由 a 的任意性得 $L\subseteq(S(S-L)]$, 即 L 为 C 左理想. □

定理 1.4.9 设 S 为序半群, 则 S 为 C 左单的当且仅当 S 是它的极小左理想之无交并.

证明 **必要性** 设 S 为 C 左单的, $\forall a\in S$, 有 $L(a)=(Sa]$. 否则 $a\notin(Sa]$, 有 $(Sa]\subseteq(S(S-(Sa])]$, 即 $(Sa]$ 为 S 的 C 左理想, 矛盾. 设 L 为 S 的左理想且 $L\subset(Sa]$. 因为 $a\notin L$, 故

$L \subseteq Sa \subseteq (S(S-L)]$, 矛盾. 故 $(Sa]$ 为 S 的极小左理想. 又 $S = \bigcup_{a\in S}(Sa]$, 所以 S 为它的极小左理想之并, 由 $(Sa]$ 的极小性, 得该并显然是不相交的 (除重合).

充分性　设 $S = \bigcup_{i\in I} L_i$, L_i 为 S 的极小左理想, 易知每个 $L_i (i \in I)$ 恰为一个 $\mathcal{L}$ 类. 如果 $|I| = 1$, 则 S 左单, 显然 S 为 C 左单的. 如果 $|I| > 1$, 设 L 为 S 的任一真左理想, 则 $L = \bigcup_{j\in J} L_j$, $J \subset I$, $S = L \cup (\bigcup_{i\in I\setminus J} L_i)$, 由定理 1.4.2, L 不是 C 左理想. □

我们知道 Ljapin 证明了如果半群 S 是它的极小左理想之并, 那么 S 一定是单的, 该结论可以推广到序半群.

定理 1.4.10　如果序半群 $S = \bigcup_{i\in I} L_i$, 其中每个 L_i 为极小左理想, 那么 S 一定是单的.

推论 1.4.11　任何 C 左单的序半群一定为单的.

§5　素根定理

众所周知, 环的根的很多性质在半群中也成立. 例如在半群中, 我们已经证明每个半群理想可以表达成为包含它的 S 的所有素理想的交. 通常这一结果称为 S 的素根定理 [9], 在本节中, 我们将这一结果推广到序半群中去.

我们首先做以下的准备.

引理 1.5.1　设 I 为 S 的理想, M 为 S 的 m 系且 $I \cap M = \emptyset$. 那么存在一个极大 m 系 M^* 使得 $I \cap M^* = \emptyset$, 且 $M \subseteq M^*$.

证明　设 $\mathcal{M}$ 为 S 的包含 M 且与 I 不相交的 m 系全体. 则 $\mathcal{M} \neq \emptyset$, 因为 $M \in \mathcal{M}$. 设 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{M}$ 中的链且令 $D = \bigcup_{C\in\mathcal{C}} C$.

设 $a,b \in D$, 存在 $C \in \mathcal{C}$ 使得 $a,b \in C$, 则存在 $x \in S$ 使得 $(axb] \cap C \neq \emptyset$. 因此 $(axb] \cap D \neq \emptyset$, 由 m 系的定义, D 为 m 系. 又 $M \subseteq D$ 且

$$I \cap D = I \cap (\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C) = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} (I \cap C) = \emptyset.$$

由 Zorn 引理, $\mathcal{M}$ 中包含极大元 M^*. □

引理 1.5.2 设 S, I, M 和 M^* 同上引理, 则 $S - M^*$ 是 S 的包含 I 的极小弱素理想.

证明 设 $a,b \in S$ 且 $(aSb] \subseteq S - M^*$, 则 $a \in S - M^*$ 或 $b \in S - M^*$. 否则 $a,b \notin S - M^*$, 有 $a,b \in M^*$. 因为 M^* 为 m 系, 存在 $x \in S$ 使得 $(axb] \cap M^* \neq \emptyset$ 和 $(axb] \subseteq S - M^*$ 矛盾. 由定理 1.1.2, $S - M^*$ 为 S 的弱素理想. 显然 $I \subseteq S - M^*$. 设 J 为 S 的弱素理想且 $I \subset J \subset S - M^*$, 由定理 1.1.2 及 m 系的定义, $S - J$ 为 m 系, 显然 $(S - J) \cap I = \emptyset$, 且 $M^* \subset S - J$ 和 M^* 的极大性假设矛盾. 因此 $S - M^*$ 为 S 的包含 I 的极小弱素理想. □

引理 1.5.3 I 为序半群 S 的半素理想, 则下列各款成立:

(1) 设 $ab \in I$, 则 $axb \in I$, $\forall x \in S$;

(2) 设 $ab^n \in I$, $\forall n \in N$, 则 $ab \in I$;

(3) 设 $a_1a_2\cdots a_n \in I$, 则 $a_{1\pi}a_{2\pi}\cdots a_{n\pi} \in I$, 这里 π 是 $1,2,\cdots,n$ 中一个置换.

该引理的证明和 [10] 中引理 II.3.5 的证明类似, 略. □

引理 1.5.4 设 M 为 S 的 m 系, I 为 S 的半素理想且 $I \cap M = \emptyset$. 那么存在 S 的极大半素理想 P 且 $I \subseteq P, P \cap M = \emptyset$. 进一步地, 下列各款成立:

(1) 设 $a \notin P$, $a^{-1}P = \{b \mid b \in S, ab \in P\}$, 则 $a^{-1}P = P$.

(2) P 是 S 的素理想.

证明 由 Zorn 引理，P 的存在性是显然的. 下面我们证 (1) 和 (2) 两款.

(1) 显然 $P \subseteq a^{-1}P$. 设 $b \in a^{-1}P, y \in S$ 且 $y \leq b$, 那么 $ay \leq ab \in P$. 则 $ay \in P$, 有 $y \in a^{-1}P$. 设 $x \in a^{-1}P, y \in S$. 那么 $ax \in P$, 从而 $axy \in P$, 即 $xy \in a^{-1}P$. 由引理 1.5.3(3), $yx \in a^{-1}P$. 又设 $x^2 \in a^{-1}P$, 则 $ax^2 \in P$, 由引理 1.5.3(2), 得 $ax \in P$, 故 $x \in a^{-1}P$. 综上所述，$a^{-1}P$ 为 S 的半素理想. 另一方面

A) 如果 $a \in M$, 则 $a^{-1}P \cap M = \emptyset$. 事实上，如果 $b \in M \cap a^{-1}P$, 那么 $ab \in P$ 且存在 $x \in S$ 使得 $(axb] \cap M \neq \emptyset$. 由引理 1.5.3(1)，因为 $ab \in P$, 故 $axb \in P$ 和 $P \cap M = \emptyset$ 矛盾，故 $a^{-1}P \cap M = \emptyset$, 又 $I \subseteq P \subseteq a^{-1}P$. 由 $a^{-1}P$ 的极大性得 $a^{-1}P = P$.

B) 如果 $a \notin M$, 我们也有 $a^{-1}P \cap M = \emptyset$. 事实上，如果 $c \in a^{-1}P \cap M$, 那么 $ac \in P$, 从而 $ca \in P$. 因此，$a \in c^{-1}P$. 因为 $P \cap M = \emptyset$, 必有 $c \notin P$ (否则有 $a \in P$). 由 A) 的讨论 $c^{-1}P = P$. 从而 $a \in P$ 和假设矛盾. 同上讨论，有 $a^{-1}P = P$.

(2) 由 (1), 设 $ab \in P, a \notin P$, 必有 $b \in a^{-1}P = P$, 故 P 为素理想. □

下面我们给出本节的两个主要定理.

定理 1.5.5 设 S 为序半群，则 S 的每个弱半素理想 I 可以表达成 S 的所有包含 I 的弱素理想的交.

证明 设 $\{P_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 是 S 的包含 I 的弱素理想集，显然 $I \subseteq \bigcap_{\alpha\in\Gamma} P_\alpha$.

假如 $d_0 \notin I$, 记 $D_0 = [d_0)$, 因为 I 为弱半素理想，则 $(d_0Sd_0] \nsubseteq I$. 否则 $(Sd_0S]^2 = (Sd_0S](Sd_0S] \subseteq (Sd_0Sd_0S] = (S(d_0Sd_0]S] \subseteq (SIS] \subseteq I$. 从而 $(Sd_0S] \subseteq I$. 又

$$I(d_0)^3 = (d_0 \cup Sd_0 \cup d_0S \cup Sd_0S]^3 \subseteq (Sd_0S] \subseteq I,$$

故 $d_0 \in I(d_0) \subseteq I$, 矛盾.

由上证, $(d_0 S d_0] \nsubseteq I$, 从而存在 $x_0 \in S$ 使得 $(d_0 x_0 d_0] \cap (S \backslash I) \neq \phi$. 那么存在 $d \in S \backslash I$, 使得 $d \leq d_0 x_0 d_0$. 因为 $d \notin I$, 所以 $d_0 x_0 d_0 \notin I$, 从而 $(d_0 x_0 d_0] \cap I \neq \emptyset$. 令

$$D_1 = [d_0 x_0 d_0), \quad d_1 = d_0 x_0 d_0,$$

则 $d_1 \notin I$. 归纳地, 我们有 $M = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$, 这里 $D_n = [d_n), d_n = d_{n-1} x_{n-1} d_{n-1}$, $d_i \notin I$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$. 因为每个 D_n 和 I 不相交, 故 $M \cap I = \emptyset$. 下面我们证 M 为 S 的 m 系. 设 $a, b \in M$. 存在 D_i, D_j 使得 $a \in D_i, b \in D_j$, 那么

$$a \geq d_i = d_{i-1} x_{i-1} d_{i-1}, \quad b \geq d_j = d_{j-1} x_{j-1} d_{j-1}.$$

A) 如果 $i = j$, 那么 $a x_i b \geq d_i x_i d_i = d_{i+1}$, 则 $[a x_i b) \subseteq D_{j+1} \subseteq M$, 从而 $(a x_i b] \cap M \neq \emptyset$.

B) 如果 $j > i$, 那么存在 $k \in S$ 使得

$$\begin{aligned} d_j &= d_{j-1} x_{j-1} d_{j-1} = d_{j-2}(x_{j-2} d_{j-2} x_{j-1} d_{j-2} x_{j-2}) d_{j-2} \\ &= \cdots = d_i k d_i, \end{aligned}$$

那么

$$a(k d_i x_j) b \geq d_i k d_i x_j d_j = d_j x_j d_j = d_{j+1}.$$

因此 $(a(k d_i x_j) b] \cap M \neq \emptyset$, 因为 $a(k d_i x_j) b \in D_{j+1}$.

同理如果 $j < i$, 类似于 B) 可证存在 $h \in S$ 使得 $(a h b] \cap M \neq \emptyset$. 综上所述, M 为 S 的 m 系, 由引理 1.5.2 和 1.5.4, 存在 S 的极大 m 系 M^*, $M \subseteq M^*, M^* \cap I = \emptyset$, $S \backslash M^*$ 为 S 的极小弱素理想且 $I \subseteq S \backslash M^*$. 因为 $d_0 \in M^*$, 我们有 $d_0 \notin S \backslash M^*$, 从而 $d_0 \notin \bigcap_{\alpha \in \Gamma} P_\alpha$. 结果 $\bigcap_{\alpha \in \Gamma} P_\alpha \subseteq I$. □

通过以上证明, 我们不难看出 S 的每个弱半素理想 I 是 S 的包含 I 的所有极小弱素理想的交.

定理 1.5.6 设 S 为序半群, I 为 S 的理想. 则下列各款等价:

(1) I 是 S 的包含它的所有素理想的交;

(2) I 是 S 的包含它的极小素理想的交;

(3) $I = \bigcup_{x\in I}(x)_{\mathcal{N}}$;

(4) I 是半素的.

证明 (1) $\Longrightarrow$ (2) 显然. 由推论 2.3.2, S 的每个素理想是 $\mathcal{N}$ 类的并, 由 2) I 为 $\mathcal{N}$ 类的并. 故 (2) $\Longrightarrow$ (3) 成立.

(3) $\Longrightarrow$ (4) 设 $I = \bigcup\{(x)_{\mathcal{N}} \mid x \in I\}$, $a^2 \in I$. 则 $a \in (a)_{\mathcal{N}} = (a^2)_{\mathcal{N}} \subseteq I$.

(4) $\Longrightarrow$ (1) 设 $\{P_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 为 S 的包含 I 的素理想集, 那么 $I \subseteq \bigcap_{\alpha\in\Gamma} P_\alpha$. 如果 $a \notin I$, 由定理 1.5.5 的证明, 我们能构造出一个 m 系 M 使得 $a \in M, M \cap I = \emptyset$. 由引理 1.5.4, 存在 S 的素理想 P 使得 $a \notin P$ 且 $I \subseteq P$. 因此 $a \notin \bigcap_{\alpha\in\Gamma} P_\alpha$. 结果 $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} P_\alpha \subseteq I$. □

本节最后, 我们给出环论中根的类似结论.

定义 1.5.7 设 S 为序半群, I 为 S 的理想, 那么子集

$$\{x \in S \mid x^n \in I, \quad n \in N\}$$

称为 I 的根, 记为 $\sqrt{I}$.

显然 $I \subseteq \sqrt{I}$ 且 $(\sqrt{I}] = \sqrt{I}$.

定理 1.5.8 设 S 为可换的序半群, I 为 S 的理想, 则 $\sqrt{I}$ 是 S 的包含 I 的所有素理想的交.

证明 设 S 可换, 则 $\sqrt{I}$ 为 S 的半素理想. 由定理 1.5.5, $\sqrt{I}$ 是 S 的包含它的所有素理想的交. 设 P 为素理想, 如果 $\sqrt{I} \subseteq P$, 显然 $I \subseteq P$; 反之, 如果 $I \subseteq P$, 则 $\forall x \in \sqrt{I}$, 存在 $n \in N$ 使得 $x^n \in I \subseteq P$, 从而 $x \in P$. 故 $\sqrt{I} \subseteq P$ 当且仅当 $I \subseteq P$, 从而有 $\sqrt{I}$ 是 S 的包含 I 的所有素理想的交. □

不难看出, 如果 S 为负序半群, 即 $(\forall a, b \in S)\ ab \leq a, b$, 那么 S 的一个理想是素的、弱素或素序理想这三个概念就是一致的了, 因为 $I(a) = (a], \forall a \in S$.

推论 1.5.9 设 S 是负序的可剩余的序半群, I 为 S 的理想, 则 $\sqrt{I}$ 是 S 的包含 I 的所有素理想的交.

一般情况下, $\sqrt{I}$ 不一定为 S 的理想, 所以推论 1.5.9 的结论不一定成立, 读者可以自己举出反例.

§6 理想格

设 S 为序半群, 本节我们讨论一个格 L 满足什么条件时, L 同构于 S 的理想格.

首先, 我们不难看出

A) S 的任一理想簇 $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 的交 $\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} I_\alpha$ 仍为 S 的理想;

B) S 的任一理想簇之并也为 S 的理想;

C) 设 I, J 为 S 的非空理想, 则 $I\cap J$ 也为 S 的非空理想;

D) 设 I, J 为 S 的理想且 $I(a)=I\cup J$, 则 $I(a)=I$ 或 $I(a)=J$;

E) 设 $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 为 S 的理想簇且 $(a)\subseteq\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} I_\alpha$, 则存在 $k\in\Gamma$ 使得 $(a)\subseteq I_k$.

设 L 为格, $a\in L$, a 称为并不可约的, 如果 $b,c\in L$ 且 $a=b\vee c$ 可推出 $a=b$ 或 $a=c$. a 称为紧的如果对 L 的任意子集 A, $a\leq\bigvee A$ 可推出存在 A 的有限子集 A_0 使得 $a\leq\bigvee A_0$.

定义 1.6.1 称一个格 L 满足条件 (*), 如果 L 满足:

1) L 是分配的完备格;

2) L 的任意两个非零元素的交仍是非零元;

3) L 的每个元为 L 的完备的并不可约的元素并;

4) L 的所有完备的并不可约元素集 P 是 $\wedge$ 半格.

引理 1.6.2 设 I 为 S 的非空理想, 则 I 是紧的并不可约的当且仅当 I 为 S 的主理想.

证明 设 I 为 S 的主理想, 由 D) 和 E) 可得 I 是紧的且并不可约. 反之, 因为 $I = \bigcup\limits_{a \in I}(a)$, 由 I 是紧的, 存在 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in I$ 使得

$$I = (a_1) \cup (a_2) \cup \cdots \cup (a_n),$$

由 I 是并不可约的, 存在 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 使得 $I = (a_i)$. □

由引理 1.6.2 及 C) 我们不难看出

定理 1.6.3 设 S 是一个序半群且 S 的任两个主理想之交仍为 S 的主理想, 则 S 的理想格 $I(S)$ 满足条件 (*).

证明 略.

命题 1.6.4 设 S 是可换的序半群且 S 的每一个理想是半素的, 则格 $I(S)$ 满足条件 (*).

证明 设 $a, b \in S$, 显然 $(ab) \subseteq (a) \cap (b)$. 设 $\forall x \in (a) \cap (b)$, 则存在 $u, v, w, t \in S^1$ 使得 $x \leq uav, x \leq wbt$, 因此 $x^2 \leq uvwtab \in (ab)$, 故 $x^2 \in (ab)$. 因为 (ab) 是半素的, 得出 $x \in (ab)$. 由定理 1.6.3, 结论成立. □

为了证明定理 1.6.3 的逆成立, 我们需要以下准备.

定义 1.6.5 设 P 是一个偏序集, P 的子集 A 称为 P 的理想, 如果 $(A] = A$. P 的所有理想集记为 $I(P)$.

引理 1.6.6 设 P 为 $\wedge$ 半格, 则存在一序半群 S 使得 S 的主理想集 $P(S)$ 同构于 P.

证明 令 $S = (P, \wedge)$, 则 S 是一个序半群, $(\forall a \in S)(a) = (a \cup aS \cup Sa \cup SaS] = (a]$.

作映射 $\phi: P \longrightarrow P(S) \mid a \longrightarrow (a]$. 不难验证 ϕ 是 P 到 $P(S)$ 的同构映射. □

引理 1.6.7 设 L 为满足条件 (*) 的格, P 为 L 的非空紧并不可约元素集, 则 $(I(P), \cup, \cap)$ 也为格且 $L \cong I(P)$.

证明 作一个映射

$$P:\ L \longrightarrow I(P) \mid f(x)=\{p\in P \mid p\leq x\}.$$

则 f 是一一保序映射. 事实上,

1) f 是满射. 设 $A\in I(P)$, 令 $x=\bigvee A$, 则 $\forall a\in A$, 有 $a\leq x$, 故 $A\subseteq f(x)$. 反之, 设 $b\in f(x)$, 则 $b\leq \bigvee A=x$. 因为 b 是紧的, 存在 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in A$ 使得

$$b\leq a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_n,$$

推出

$$b=(a_1\wedge b)\vee(a_2\wedge b)\vee\cdots\vee(a_n\wedge b).$$

因为 b 是并不可约的, 存在 $i\in\{1,2,\cdots n\}$ 使得 $b=a_i\wedge b$, 即 $b\leq a_i$. 因此 $b\in A$. 由此证明了 $A=f(x)$.

2) f 是单的. 事实上, $\forall x\in L, x\geq \bigvee f(x)$; 另一方面, 因为 x 是紧并不可约的元素的并, 即

$$x=\bigvee_{\alpha\in\Gamma} p_\alpha,\quad p_\alpha\in P,$$

故 $\forall\alpha\in\Gamma,\ \ p_\alpha\in f(x)$. 从而

$$x=\bigvee_{\alpha\in\Gamma} p_\alpha\leq\bigvee f(x).$$

故 $x=\bigvee f(x)$. 由此得出, 如果 $x\neq y$, 则 $f(x)\neq f(y)$.

3) f 是保序的可明显看出.

4) $f(x\vee y)=f(x)\cup f(y)$, $f(x\wedge y)=f(x)\cap f(y)$. 我们仅证明第一式, 类似可证第二式. 事实上, 设 $p\in f(x\vee y)$, 则 $p\leq x\vee y$, 即 $p=(p\wedge x)\vee(p\wedge y)$. 由 p 是并不可约的, 得 $p=p\wedge x$ 或 $p=p\wedge y$, 即 $p\in f(x)\cup f(y)$. 反之, 设 $q\in f(x)\cup f(y)$, 得

$q \leq x$ 或 $q \leq y$, 故 $q \leq x \vee y$, 即 $q \in f(x \vee y)$. 综上 1)—4), 我们有 $L \cong I(P)$. □

至此, 我们可得出本节的主要定理.

定理 1.6.8 一个格 L 同构于一个满足任意两个主理想之交仍为主理想的序半群的理想格 (包括空集) 当且仅当 L 满足条件 $(*)$.

证明 我们仅需证明充分性. 设 L 满足条件 $(*)$, P 为 L 的非空紧且并不可约的元素集, 则 P 关于 L 的序关系是一个 $\wedge$ 半格. 由引理 1.6.6, 存在一个序半群 S 使得 $P \cong P(S)$, 由引理 1.6.6 的证明不难看出, S 是可换的且 S 的任意理想是半素的, 由定理 1.6.3, S 满足任意两个主理想之交仍为主理想.

又 $I(S)$ 是一个满足条件 $(*)$ 的格, $P(S)$ 是 $I(S)$ 的所有紧的并不可约元素集, 由引理 1.6.7, $I(S) \cong I(P(S))$, 同理可得 $L \cong I(P)$. 因为 $P \cong P(S)$. 我们有 $I(P) \cong I(P(S))$, 故 $L \cong I(S)$.

§7 理想的扩张

本节我们设 S 为可换的序半群. 主要结果来自 [11].

定义 1.7.1 设 I 为 S 的理想, $x \in S$. 集合

$$< x, I > := \{a \in S \mid xa \in I\}$$

称为 I 关于 x 的扩张.

由于 I 的扩张的定义, 我们不难证明

命题 1.7.2 设 I 为 S 的理想, $x \in S$, 则下列各款成立:

1) $< x, I >$ 为 S 的理想;

2) $I \subseteq < x, I > \subseteq < x^2, I >$;

3) 如果 $x \in I$, 那么 $< x, I >= S$;

4) I 是 S 的素理想当且仅当 $\forall x \notin I$, $< x, I >= I$.

命题 1.7.3 设 I 为 S 的素理想簇的交, 则 $\forall x \in S, < x, I >$ 是 S 的半素理想.

证明 因为 $\forall x \in S$,

$$< x, I >=< x, \bigcap_{\alpha \in A} P_\alpha >= \bigcap_{\alpha \in A} < x, P_\alpha > .$$

如果 $x \in P_\alpha$, 则 $< x, P_\alpha >= S$. 如果 $x \notin P_\alpha$, 由命题 1.7.1(4), $< x, P_\alpha >= P_\alpha$. 设

$$B := \{\alpha \in A \mid x \notin P_\alpha\},$$

则

$$< x, I >= \bigcap_{\alpha \in B} P_\alpha.$$

因为素理想簇之交为半素理想, 命题得证. □

命题 1.7.4 设 S 为序半群且有单位元 e, $a, b \in S$, 则 $I(a) \subseteq I(b)$ 当且仅当对 S 的任意理想 J, 有 $< a, J > \supseteq < b, J >$.

证明 **必要性** 设 J 为 S 的理想且 $z \in < b, J >$, 则从 $a \in I(a) \subseteq I(b) = (Sb]$ 可得存在 $x \in S$, 使得 $a \leq xb$, 故

$$az \leq (xb)z = (bz)x \in JS \subseteq J,\ az \in J,\ z \in < a, J > .$$

充分性 因为 $I(b)$ 为 S 的理想, 由假设, $< a, I(b) > \supseteq < b, I(b) >$, 故 $S =< a, I(b) >$. 因为 $e \in < a, I(b) >$, 故 $a = ae \in I(b)$, 从而 $I(a) \subseteq I(b)$. □

设 I 为 S 的理想, 通过 I 我们可定义 S 的等价关系 ρ_I

$$\rho_I := \{(x, y) | < x, I >=< y, I >\}.$$

定理 1.7.5 设 S 为序半群，则下列各款成立：

1) 如果 I 为 S 的半素理想，则 ρ_I 为 S 的半格同余且满足

$$x \leq y \Longleftrightarrow (x, xy) \in \rho_I.$$

2) 如果 I 为 S 的素理想，则 $\rho_I = \sigma_I$ 且 $\mathcal{N} \subseteq \rho_I$.

证明 1) 首先我们可证 ρ_I 为 S 上的半格同余. 设 $(x, y) \in \rho_I, c \in S$. 则 $(xc, yc) \in \rho_I$. 事实上,

$$\begin{aligned} a \in < xc, I > &\Longleftrightarrow (xc)a \in I \Longleftrightarrow x(ca) \in I \\ &\Longleftrightarrow ca \in < x, I > \Longleftrightarrow ca \in < y, I > \\ &\Longleftrightarrow y(ca) \in I \Longleftrightarrow (yc)a \in I \\ &\Longleftrightarrow a \in < yc, I > . \end{aligned}$$

又设 $x \in S$, 由命题 1.7.2(2), $< x, I > \subseteq < x^2, I >$. 另一方面,

$$\begin{aligned} a \in < x^2, I > &\Longrightarrow x^2 a \in I \\ &\Longrightarrow (xa)^2 = (x^2 a)a \in IS \subseteq I \\ &\Longrightarrow xa \in I \Longrightarrow a \in < x, I >, \end{aligned}$$

故 $< x^2, I > \subseteq < x, I >$, 因此 $(x, x^2) \in \rho_I$.

设 $x \leq y$, 则 $(x, xy) \in \rho_I$. 事实上,

$$\begin{aligned} z \in < x, I > &\Longrightarrow xz \in I \Longrightarrow (xz)y \in IS \subseteq I \\ &\Longrightarrow (xy)z \in I \Longrightarrow z \in < xy, I > . \\ z \in < xy, I > &\Longrightarrow (xy)z \in I \\ &\Longrightarrow (xz)^2 = xxz^2 \leq xyz^2 \\ &\qquad = (xyz)z \in IS \subseteq I \\ &\Longrightarrow xz \in I (I \text{ 半素}) \\ &\Longrightarrow z \in < x, I > . \end{aligned}$$

故 $<x,I>=<xy,I>$.

2) 设 $(x,y)\in\rho_I$, 则 $x,y\in I$ 或 $x,y\notin I$. 否则, 设 $x\in I, y\notin I$, 则 $<x,I>=S$, $<y,I>=I$, 又因为 $<x,I>=<y,I>$, 不可能. 同理可证 $x\notin I, y\in I$ 的情况不成立. 故 $(x,y)\in\sigma_I$. 反之, 设 $(x,y)\in\sigma_I$ 且 $x\in I$, 则 $y\in I$, 从而 $<x,I>=S=<y,I>$, 故 $(x,y)\in\rho_I$. 设 $x\notin I$, 则 $y\notin I$, 从而 $<x,I>=I=<y,I>$, 故 $(x,y)\in\rho_I$. 由命题 1.3.3,

$$\mathcal{N}=\bigcap_{I\in\mathcal{J}(S)}\sigma_I.$$

从而

$$\mathcal{N}=\bigcap_{I\in\mathcal{J}(S)}\sigma_I=\bigcap_{I\in\mathcal{J}(S)}\rho_I\subseteq\rho_I. \qquad \square$$

下面我们将素理想的概念推广到 n 素 $(n\geq 2)$, 再讨论与理想扩张之间的关系.

定义 1.7.6 序半群 S 的一个理想 I 称为 n 素的, 如果

$$x_1x_2x_3\cdots x_{n-1}x_n\in I\ (\forall x_1,x_2,\cdots,x_n\in S),$$

则集合

$$\{x_2x_3\cdots x_{n-2}x_{n-1}x_n, x_1x_3\cdots x_{n-2}x_{n-1}x_n, x_1x_2x_4\cdots x_{n-2}x_{n-1}x_n,\cdots, x_1x_2x_3\cdots x_{n-2}x_{n-1}\}$$

中至少有 $n-1$ 个元素属于 I.

显然 S 的 2 素理想即为常见的素理想.

命题 1.7.7 S 的每个 $(n-1)$ 素理想是 n 素的 $(n\geq 3)$.

证明 设 I 为 $(n-1)$ 素理想且

$$x_1x_2x_3x_4\cdots x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n\in I,\forall x_i\in S.$$

因为

$$(x_1x_2)x_3x_4\cdots x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n\in I,$$

则 $n-1$ 个元素的集合

$$M=\{x_3x_4\cdots x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n,(x_1x_2)x_4\cdots x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n,$$
$$(x_1x_2)x_3x_5\cdots x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n,\cdots,$$
$$(x_1x_2)x_3x_4\cdots x_{n-3}x_{n-1}x_n,(x_1x_2)x_3x_4\cdots x_{n-3}x_{n-2}x_n,$$
$$(x_1x_2)x_3x_4\cdots x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}\}$$

中至少有 $n-2$ 个元素属于 I.

我们考察下列两重情况:

A) 设 $x_3x_4\cdots x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n\notin I$, 则 M 中剩下的所有元素均属于 I. 另外, 因为 $x_1x_2x_3x_4\cdots x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}\in I$, 则 $n-1$ 个元素的集合

$$K=\{x_2x_3x_4\cdots x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1},x_1x_3x_4\cdots x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1},$$
$$x_1x_2x_4\cdots x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1},x_1x_2x_3x_5\cdots x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1},\cdots,$$
$$x_1x_2x_3x_4\cdots x_{n-3}x_{n-1},x_1x_2x_3x_4\cdots x_{n-3}x_{n-2}\}.$$

中至少有 $n-2$ 个元素属于 I. 故

$$x_2x_3x_4\cdots x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}\in I \text{ 或 } x_1x_3x_4\cdots x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}\in I.$$

从而

$$x_2x_3x_4\cdots x_{n-2}x_{n-1}x_n\in I \text{ 或 } x_1x_3x_4\cdots x_{n-2}x_{n-1}x_n\in I.$$

B）设 $x_3x_4\cdots x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n\in I$, 那么 $n-2$ 个元素的集合

$$T=\{(x_1x_2)x_4\cdots x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n,$$

$$(x_1x_2)x_3x_5\cdots x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n,\cdots,$$

$$(x_1x_2)x_3x_4\cdots x_{n-3}x_{n-1}x_n,(x_1x_2)x_3x_4\cdots x_{n-3}x_{n-2}x_n,$$

$$(x_1x_2)x_3x_4\cdots x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}\}.$$

中至少有 $n-3$ 个元素属于 I. 另外由 $x_3x_4\cdots x_{n-2}x_{n-1}x_n\in I$ 可得

$$x_2x_3x_4\cdots x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n\in I$$

且

$$x_1x_3x_4\cdots x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n\in I.$$

□

值得注意的是上述命题的逆命题是不对的.

例 1.7.8 设 $S=\{a,b,c,d\}$，S 的乘法 "$\cdot$" 及序 "$\le$" 定义如下：

.	a	b	c	d
a	b	b	d	d
b	b	b	d	d
c	d	d	c	d
d	d	d	d	d

$$\le:=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(d,b),(d,c)\}.$$

那么集合 $\{d\}$ 是 S 的理想. 我们可以证明 $\{d\}$ 是 3 素的, 但 $\{d\}$ 不是 2 素的. 因为 $bc=d$ 而 $b\neq d$ 且 $c\neq d$.

定理 1.7.9 设 I 是 S 的理想，则 I 是 n 素的当且仅当 I 的任意扩张 $< x, I >, \forall x \in S$ 是 $(n-1)$ 素的 $(n \geq 3)$.

该定理的证明可参见上命题用归纳法证明，这里略去.

由该定理不难得出以下推论.

推论 1.7.10 设 S 含有单位元 e, 则 n 素理想和 $(n-1)$ 素理想是一致的 $(n \geq 3)$.

定理 1.7.11 设 I 为 S 的 n 素且为半素的理想 $(n \geq 3)$. 设

$$\mathcal{P} := \{T \mid T \text{ 为 } S \text{ 的 } (n-1) \text{ 素理想且} T \supseteq I\}.$$

则 $I = \bigcap_{T \in \mathcal{P}} T$,

证明 因为 I 为 S 的半素理想，设

$$a \in \bigcap_{x \in S} < x, I >,$$

则 $a \in < a, I >$, 从而 $a \in I$. 显然 $I \subseteq < x, I >, \forall x \in S$, 故 $I = \bigcap_{x \in S} < x, I >$.

因为 I 为 n 素的，由定理 1.7.7, $< x, I >$ 为 $(n-1)$ 素的，故

$$I = \bigcap_{x \in S} < x, I > \supseteq \bigcap_{T \in \mathcal{P}} T.$$

又 $I \subset T, \forall T \in \mathcal{P}$, 故 $I \subseteq \bigcap_{T \in \mathcal{P}} T$. □

由该定理，我们有下推论.

推论 1.7.12 设 S 为半格，则 S 的每个 n 素理想 $(n \geq 3)$ 可以表达为 S 的包含它的所有 $(n-1)$ 素理想的交.

§8 序半群的扩张

本节所讨论的序半群 S 为全序半群. 半群 $\sum$ 称为半群 S 由半群 T^0 的理想扩张 (扩张), 如果 S 为 $\sum$ 的理想且 Rees 商半群 $\sum/S \cong T^0$.

设 S 和 T 为不相交的半群且 T 包含零元, 则 $T = T^0$, 设 $T^* = T^0\backslash\{0\}$, φ 为 T^* 到 S 的单值映射且满足:

$$(\forall t, t' \in T^*)\ tt' \neq 0 \Rightarrow (tt')\varphi = (t\varphi)(t'\varphi).$$

记 $\sum = S \cup T^*$, 我们定义 $\sum$ 上的二元运算 "$\circ$" 如下: 设 $t, t' \in T^*$; $s, s' \in S$.

$(M1)$

$$t \circ t' = \begin{cases} tt', & \text{设 } tt' \neq 0, \\ (t\varphi)(t'\varphi), & \text{设 } tt' = 0; \end{cases}$$

$(M2)$ $\quad t \circ s = (t\varphi)s;$

$(M3)$ $\quad s \circ t = s(t\varphi);$

$(M4)$ $\quad s \circ s' = ss'.$

则 $\sum$ 是 S 由 T 的扩张. 设 S 中有单位元, 则 S 的每个理想扩张均可以这样构作 (见 [12]).

本节讨论的是如果 S 和 T 均为序半群, 那么它们的序可否扩张为 $\sum$ 的序? 如果可扩张应有什么条件?

T 的一个子集 M 称为 T 的零化子, 如果 $\forall t \in M, t \neq 0$ 且

$$(\forall t' \in T)\ \ tt' = t't = 0;$$

T 称为本质半群 (essential semigroup), 如果 $M \subseteq T^2$; $\sum$ 上的全序关系 $\leq$ 称为 S 和 T 上序关系的扩张, 如果 $\leq|_S, \leq|_T$ 分别为 S 和 T 上原有序关系.

定义 1.8.1 设 (X,Y) 为 T^* 的子集且满足:

1) 如果 $X \neq \emptyset, Y \neq \emptyset$, 那么 $XY = YX = \{0\}$;

2) $X^2 \subseteq X \cup \{0\}$, $Y^2 \subseteq Y \subseteq \{0\}$;

3) $X \cup Y = T^*$, $X \cap Y = \emptyset$.

称 (X,Y) 为 T^* 的零分解.

引理 1.8.2 设 (X,Y) 是 T^* 的零分解. 如果 $tt' \neq 0$, 那么 t, t' 和 tt' 要么同时属于 X, 要么同时属于 Y.

证明 因为 $tt' \neq 0$, 如果 $t \in X, t' \in Y$, 则 $tt' = 0$, 矛盾. 又 $X^2 \subseteq X \cup \{0\}$, $Y^2 \subseteq Y \cup \{0\}$, 故 $t, t', tt' \in X$ 或同时 $t, t', tt' \in Y$. □

定理 1.8.3 设 T 是本质半群, 那么 (T^-, T^+) 和 $(T^*, \emptyset)$ 是 T^* 仅有的零分解, 这里

$$T^- = \{t \in T^* \mid t < 0\}, \quad T^+ = \{t \in T^* \mid t > 0\}.$$

证明 设 $a, b \in T^- \backslash M$, 那么存在 $t_1, t_2 \in T^*$, 使得 $at_1 \neq 0$ 或 $t_1 a \neq 0$; $bt_2 \neq 0$ 或 $t_2 b \neq 0$. 因为 $T^- T^+ = \{0\}$, $T^+ T^- = \{0\}$, 故 $t_1, t_2 \in T^-$.

设 $a < b$, 如果 $bt_2 \neq 0$, 则 $bt_2 \in T^-$, 即 $bt_2 < 0$, 从而 $at_2 \leq bt_2 < 0$, 故 $at_2 \neq 0$; 同理如果 $t_2 b \neq 0$, 则 $t_2 a \neq 0$. 故存在 $t \in T^*$ 使得 $at \neq 0, bt \neq 0$ 或 $ta \neq 0, tb \neq 0$. 如果 a, b 中有一个属于 X, 则由引理 1.8.2, 另一个也属于 X. 即证明了, 如果 (X,Y) 为 T^* 的零分解, $X \cap T^- \backslash M \neq \emptyset$, 则 $T^- \backslash M \subseteq X$.

又设 $X \cap T^- \neq \emptyset$, 我们分以下两种情形:

A) 如果 $M \cap T^- = \emptyset$, 则 $T^- \backslash M = T^-$. 这时, 由 $X \cap T^- \neq \emptyset$ 可推出 $X \cap T^- \backslash M \neq \emptyset$, 从而 $T^- = T^- \backslash M \subseteq X$.

B) 如果 $M \cap T^- \neq \emptyset$, 我们又分两种情形:

a) 如果 $M \cap T^- \cap X = \emptyset$, 则 $X \cap T^- = X \cap (T^- \backslash M) \neq \emptyset$, 由上证明 $T^- \backslash M \subseteq X$. 又 $M \subseteq T^2$, 设 $x \in T^- \cap M$, 则存在 $t_1, t_2 \in T^*$ 使得 $x = t_1 t_2$, 显然 $t_1, t_2 \in T^-$ 或 $t_1, t_2 \in T^+$. 如果

$t_1, t_2 \in T^+$, 则 $x \in T^+$, 矛盾, 故

$$T^- \cap M \subseteq (T^-)^2 \backslash \{0\} = (T^- \backslash M)^2 \backslash \{0\} \subseteq X^2 \backslash \{0\} \subseteq X,$$

因此 $T^- \subseteq X$.

$b)$ 如果 $M \cap T^- \cap X \neq \emptyset$, 设 $x \in M \cap T^- \cap X$, 由 $M \subseteq T^2$, 存在 $t_1, t_2 \in T^-$ 使得 $x = t_1 t_2$. 由引理 1.8.2, $t_1 \in X$, 从而 $t_1 \in (T^- \backslash M) \cap X$, 故 $X \cap T^- \backslash M \neq \emptyset$, 由上证明 $T^- \backslash M \subseteq X$, 同 $a)$ 的证明, 可得 $T^- \subseteq X$.

类似地讨论, 设 $X \cap T^+ \neq \emptyset$, 则 $T^+ \subseteq X$. 因此 $(X, Y) = (T^-, T^+)$ 或 $(T^*, \emptyset)$. □

引理 1.8.4 设 $\leq$ 为 $\sum$ 上的扩张序,

$$X = \{t \in T^* \mid t < t\varphi\}, \quad Y = \{t \in T^* \mid t > t\varphi\}$$

是 T^* 的零分解.

证明 $\forall t \in T^*$, 则 $t > t\varphi$ 或 $t < t\varphi$, 即 $t \in X$ 或 $t \in Y$. 因为如果 $t = t\varphi$, 则 $T^* \cap S \neq \emptyset$, 矛盾. 故 $T^* = X \cup Y$ 且 $X \cap Y = \emptyset$. 如果 $X, Y \neq \emptyset$, 设 $t_1 \in X, t_2 \in Y$, 则 $t_1 < t_1\varphi$, $t_2 > t_2\varphi$, 因此

$$t_1\varphi t_2\varphi = t_1 \circ t_2\varphi \leq t_1 \circ t_2 \leq (t_1\varphi) \circ t_2 = (t_1\varphi)(t_2\varphi).$$

则 $t_1 \circ t_2 = t_1\varphi t_2\varphi$. 由 $(\sum, \circ)$ 的定义, $t_1 t_2 = 0$. 同理可证 $t_2 t_1 = 0$.

又设 $t_1, t_2 \in X$, 则 $t_1 < t_1\varphi, t_2 < t_2\varphi$ 且

$$t_1 \circ t_2 \leq (t_1\varphi) \circ t_2 = (t_1\varphi)(t_2\varphi).$$

如果 $t_1 t_2 \neq 0$, 那么 $t_1 \circ t_2 = t_1 t_2$, 故

$$t_1 t_2 < (t_1\varphi)(t_2\varphi) = (t_1 t_2)\varphi$$

或 $t_1t_2 = (t_1t_2)\varphi$. 如果 $t_1t_2 = (t_1t_2)\varphi$, 有 $S \cap T^* \neq \emptyset$, 矛盾. 故 $t_1t_2 \in X \cup \{0\}$. 同理可证 $Y^2 \subseteq Y \cup \{0\}$.

对于本质半群 T, T^* 总有零分解, 但是我们可以证明不是 S 的每个扩张都有序扩张.

例 1.8.5 设 S 是无界的右零半群. $x, y \in T^*$ 且 $xy \neq 0$, 如果存在扩张 $(\sum, \circ)$ 如前定义且 S 和 T 上的序关系可以扩张为 $\sum$ 的序关系 $\leq$. 假设 $x < x\varphi$, 因为 S 无界, 存在 $a \in S$ 使得 $a < x\varphi$. 如果 $x < a < x\varphi$, 则 $x\varphi = a(x\varphi) = a\circ \leq a^2 = a$, 矛盾. 如果 $a < x, x\varphi$, 则

$$y\varphi = a(y\varphi) = a \circ y < x \circ y = xy < (x\varphi) \circ y = (x\varphi)(y\varphi) = y\varphi,$$

矛盾. 又 S 是无上界的, 故 $x\varphi < x$ 也不能成立, 故 S 和 T 上的序关系不能扩张为 $\sum$ 上的序关系.

下面我们在 S 上引入二元关系 ρ

$$(s_1, s_2) \in \rho \Longleftrightarrow (\forall x \in S) \quad s_1x = s_2x, xs_1 = xs_2.$$

显然 ρ 为 S 上的同余关系且 $(s)_\rho, \forall s \in S$ 是凸子集. 我们在商半群 S/ρ 上引入序关系 $\preceq$

$$(s_1)_\rho \preceq (s_2)_\rho \Longleftrightarrow (\forall x \in S) \quad s_1x \leq s_2x, xs_1 \leq xs_2,$$

且自然同态 $S \mapsto S/\rho$ 是保序的.

$\forall t \in T^*$, 记 $t\overline{\varphi} = \overline{t\varphi}$, 则 $\overline{\varphi}$ 为 T^* 到 $\overline{S}$ 的部分同态. 设 $\sum$ 允许有 S 和 T 上的扩张序, 设 $t_1 < t_2$, 则

$$(t_1\varphi)x = t_1 \circ x \leq t_2 \circ x = (t_2\varphi)x,$$

且

$$x(t_1\varphi) = x \circ t_1 \leq x \circ t_2 = x(t_2\varphi).$$

因此 $t_1\overline{\varphi} \preceq t_2\overline{\varphi}$.

设 (X,Y) 为 T^* 的零分解， $t \in T^*$, 记

$$A_t = \{s \in S \mid (\exists x \in X)\ t \leq x, x\varphi \leq s\};$$

$$B_t = \{s \in S \mid (\exists y \in Y)\ y \leq t, s \leq y\varphi\}.$$

不难看出，如果 φ 是保序映射，则 $t\varphi$ 为 A_t 的最小元， B_t 的最大元. 如果 φ 不是保序的，则结论不成立. □

例 1.8.6 设

$$S = \{a, b, a^2, ab, ba, b^2, 0\},\ T = \{m, n, n^2, nm, mn, n^2, 0\},$$

S 和 T 中有三个或三个以上的因子乘积均为 0, S 和 T 上的序关系为

$$a < b < a^2 < ab < ba < b^2 < 0,$$

$$m < n < m^2 < nm < mn < n^2 < 0,$$

则 S 和 T 均为全序半群. 令 φ 为 T^* 到 S 的映射，使得 $m\varphi = a, n\varphi = b$, 则 φ 可扩充为 T^* 到 S 的部分同态. φ 不是保序的，因为 $ab < ba$, 但 $(ab)\varphi \not< (ba)\varphi$. 取 $(X,Y) = (T^*, \phi)$, $t = nm$, 则

$$A_t = \{ab, ba, b^2, 0\}.$$

但 $t\varphi = (nm)\varphi = ba$ 不为最小元.

引理 1.8.7 设 $\leq$ 为 $\sum$ 上的扩张序， (X,Y) 为 T^* 上的零分解，则

1) $t < s \Rightarrow t\overline{\varphi} \preceq \overline{s}$;
2) $t > s \Rightarrow t\overline{\varphi} \preceq \overline{s}$;
3) 如果 $s_1 < t < s_2, t \notin M$, 则 $\overline{s_1} < \overline{s_2}$;
4) $(\forall t \in T^*)\ \ B_t < t < A_t$.

证明 1) $t < s, \forall x \in S$, 则

$$(t\varphi)x = t \circ x \leq s \circ x, x(t\varphi) = x \circ t \leq x \circ s.$$

因此 $\overline{t\varphi} \preceq \overline{s}$, 即 $t\overline{\varphi} \preceq \overline{s}$. 2) 为 1) 的对偶.

3) 如果 $s_1 < t < s_2, t \notin M$, 存在 $t' \in T^*$ 使得 $tt' \neq 0$, 因此

$$s_1(t'\varphi) < tt' < s_2(t'\varphi),$$

一定有 $\overline{s_1} < \overline{s_2}$.

4) 设 $s \in A_t$, 存在 $x \in X, t \leq x$ 且 $x\varphi \leq s$. 由引理 1.8.4, $x < x\varphi$, 故 $t < s$. 对偶地有, 如果 $s \in B_t$, 则 $s < t$. □

由引理 1.8.7 我们容易得出以下二个推论.

推论 1.8.8 设 "$\leq$" 为 $\sum$ 上的扩张序, (X, Y) 为 T^* 的零分解, 那么

1) 如果 $t\overline{\varphi} < \overline{s}$ 或 $t\overline{\varphi} = \overline{s}, t \in X \backslash M$ 或 $t\overline{\varphi} = \overline{s}, t \in X \cap M, s \in A_t$, 则 $t < s$.

2) 如果 $t\overline{\varphi} > \overline{s}$ 或 $t\overline{\varphi} = \overline{s}, t \in Y \backslash M$ 或 $t\overline{\varphi} = \overline{s}, t \in Y \cap M, s \in B_t$, 则 $t > s$.

推论 1.8.9 设 $\leq_1$ 和 $\leq_2$ 为 $\sum$ 上的两个扩张序, 且与引理 1.8.4 中 $\leq_1, \leq_2$ 所确定的零分解一致, 那么, 如果 $t \in M, t\overline{\varphi} = \overline{s}$, $B_t < s < A_t$, 则 $t <_1 s, s <_2 t$.

定义 1.8.10 设 (X, Y) 是 T^* 的零分解, 序对 $[X, Y]$ 称为 T^* 的 $L'G'$ 分解, 如果 X 满足下列条件 L':

$(L'1)$ 如果 $tt' \in X$ $[t't \in X]$ 且 $\overline{s} < t\overline{\varphi}$, 则

$$s(t'\varphi) \notin A_{tt'} \quad [(t'\varphi)s \notin A_{t't}].$$

$(L'2)$ 如果 $tt' \in X$ $[t't \in X]$, $t_1 < t$ 且 $t_1\overline{\varphi} = t\varphi$, 那么 $t_1t' \in X$ $[t't_1 \in X]$.

Y 满足 L' 的序对偶, 即条件 G'.

这里我们可以给出本节的一个主要定理，该定理证明的完成还要依赖很多准备工作，本节仅介绍了讨论问题的基本思路，详见 [13, 14].

定理 1.8.11 $\sum$ 存在扩张序当且仅当 $\overline{\varphi}$ 是保序映射且 T^* 有 $L'G'$ 分解.

§9 嵌入定理

设 A 是给定的代数系统，并入一个元素到 A 中来构作一个新的代数系统而且将 A 嵌入到该新的系统中去，这种思想我们在环论中已经看到. Fuchs 和 Halperin 在 60 年代已经证明任何一个正则环可以同构嵌入到一个有单位元的正则环中去且同态像为该有单位元的正则环的理想. 本节我们主要讨论一个序半群 S 向另一个特殊序半群的嵌入问题.

一个序半群 S 称为可嵌入另一个序半群 V 的, 如果存在 S 到 V 的同态映射 f 且 f 是反保序的, 即如果 $x,y\in S$, $f(x)\leq_V f(y)$ 则 $x\leq_S y$. 不难证明任何反保序映射一定是单射.

设 $(S,\cdot,\leq)$ 是一个序半群， $e\notin S$, 记 $T:=S\cup\{e\}$ 且在 T 上定义运算 "$*$" 和序关系 "$\leq_T$" 如下：

$$*:T\times T\to T\mid (x,y)\to x*y:=\begin{cases} xy, & x,y\in S;\\ x, & y=e;\\ y, & x=e.\end{cases}$$

$$\leq_T:=\leq\cup\{(e,e)\}.$$

则 $(T,*,\leq_T)$ 是一个序半群且包含单位元 e. 下面我们定义两个映射 $[\,]$ 和 f:

$$[\,]:Z\to N\mid \xi\to[\xi]:=\begin{cases}\xi, & \xi\geq 0;\\ 0, & \xi<0;\end{cases}$$

$$f: Z\times T\times T\to T \mid (\xi,x,y)\to f(\xi,x,y)=\begin{cases} x, & \xi>0;\\ x*y, & \xi=0;\\ y, & \xi<0.\end{cases}$$

这里 Z 为整数集， N 为自然数集.

引理 1.9.1 设 $\xi,\eta\in Z$, $x,y,z\in T$, 则

1) $[\xi]+[\eta-[-\xi]]=[\xi+[\eta]]$;

2) $f(\xi+[\eta],f(\eta,x,y),z)=f(\eta-[-\xi],x,f(\xi,y,z))$.

该引理的证明只要分 $\xi\geq 0$, $\eta\geq 0$; $\xi\geq 0$, $\eta<0$; $\xi<0$, $\eta\geq 0$; $\xi<0$, $\eta<0$ 等情形来验证即可.

定理 1.9.2 设 $(S,\cdot,\leq)$ 是序半群，则 S 可以嵌入到一个单的带单位元的序半群 V 中.

证明 设 $V:=N\times T\times N; N=\{0,1,2,3,\cdots\}$, T 为带单位元 e 的序半群，定义如本节上文所述. 现定义 V 上的二元运算“$\circ$”如下:

$$\circ: V\times V\to V \mid ((\alpha,x,\beta),(\gamma,y,\delta))\to(\alpha,x,\beta)\circ(\gamma,y,\delta);$$

$$(\alpha,x,\beta)\circ(\gamma,y,\delta):=(\alpha+[\gamma-\beta],f(\beta-\gamma,x,y),\delta+[\beta-\gamma]).$$

1) 运算“$\circ$”是可定义的.

设 $((\alpha,x,\beta),(\gamma,y,\delta))\in V\times V$. 因为 $[\gamma-\beta]\geq 0,\alpha\geq 0$, 我们有 $\alpha+[\gamma-\gamma]\geq 0$, 即 $\alpha+[\gamma-\beta]\in N$. 类似地， $\delta+[\beta-\gamma]\in N$. 又因 $\beta-\gamma\in Z$, 从而 $f(\beta-\gamma,x,y)\in T$, 则 $(\alpha,x,\beta)\circ(\gamma,y,\delta)\in V$.

如果 $((\alpha,x,\beta),(\gamma,y,\delta))=((\rho,z,\lambda),(\mu,t,\nu))\in V\times V$, 则 $\alpha=\rho$, $x=z$, $\beta=\lambda,\gamma=\mu$, $y=t$, $\delta=\nu$, 而且 $(\alpha,x,\beta)\circ(\gamma,y,\delta)=(\rho,z,\lambda)\circ(\mu,t,\nu)$.

2) 运算“$\circ$”满足结合律.

设 $(\alpha,x,\beta),(\gamma,y,\delta),(\rho,z,\lambda)\in V$ ，则

$$
\begin{aligned}
& ((\alpha,x,\beta)\circ(\gamma,y,\delta))\circ(\rho,z,\lambda)\\
= \ & (\alpha+[\gamma-\beta],f(\beta-\gamma,x,y),\delta+[\beta-\gamma])\circ(\rho,z,\lambda)\\
= \ & (\alpha+[\gamma-\beta]+[\rho-\delta-[\beta-\gamma]],\\
& f(\delta+[\beta-\gamma]-\rho,f(\beta-\gamma,x,y),z),\\
& \lambda+[\delta+[\beta-\gamma]-\rho]).\\
& (\alpha,x,\beta)\circ((\gamma,y,\delta))\circ(\rho,z,\lambda))\\
= \ & (\alpha,x,\beta)\circ((\gamma+[\rho-\delta],f(\delta-\rho,y,z),\lambda+[\delta-\rho])\\
= \ & (\alpha+[\gamma+[\rho-\delta]-\beta],f(\beta-\gamma-[\rho-\delta],x,f(\delta-\rho,y,z),\\
& \lambda+[\delta-\rho]+[\beta-\gamma-[\rho-\delta]]).
\end{aligned}
$$

令 $\xi:=\gamma-\beta,\eta:=\rho-\delta$, 由引理 1.9.1, 有

$$[\gamma-\beta]+[\rho-\delta-[\beta-\gamma]]=[\gamma-\beta+[\rho-\delta]].$$

从而 $\alpha+[\gamma-\beta]+[\rho-\delta-[\beta-\gamma]]=\alpha+[\gamma+[\rho-\delta]-\beta]$.

令 $\xi:=\delta-\rho,\eta:=\beta-\gamma$, 由引理 1.9.1, 有

$$[\delta-\rho]+[\beta-\gamma-[\rho-\delta]]=[\delta-\rho+[\beta-\gamma]].$$

从而 $\lambda+[\delta-\rho]+[\beta-\gamma-[\rho-\delta]]=\lambda+[\delta+[\beta-\gamma]-\rho]$.

令 $\xi:=\delta-\rho,\eta:=\beta-\gamma,x,y,z\in T$, 由引理 1.9.1, 有

$$
\begin{aligned}
& f(\delta-\rho+[\beta-\gamma],f(\beta-\gamma,x,y),z)\\
= \ & f(\beta-\gamma-[\rho-\delta],x,f(\delta-\rho,y,z)).
\end{aligned}
$$

我们在 $(V,\circ)$ 上引入二元关系 $\leq_V$ 如下

$$(\alpha,x,\beta)\leq_V(\gamma,y,\delta)\Longleftrightarrow\alpha=\gamma,x\leq_T y,\beta=\delta.$$

另一方面,

$$
\begin{aligned}
\leq_V: &= \{((\alpha,x,\beta),(\gamma,y,\delta)) \mid \alpha=\gamma, x \leq_T y, \beta=\delta\} \\
&= \{((\alpha,x,\beta),(\alpha,y,\beta)) \mid x \leq_T y\}.
\end{aligned}
$$

3) $(V,\circ,\leq_V)$ 是一个序半群.

事实上, 设 $(\alpha,x,\beta) \in V; \alpha,\beta \in N, x \in T$. 由 $x \leq_T x$, 则 $((\alpha,x,\beta),(\alpha,x,\beta)) \in \leq_V$; 设

$$((\alpha,x,\beta),(\alpha,y,\beta)) \in \leq_V,\ ((\alpha,y,\beta),(\alpha,x,\beta)) \in \leq_V,$$

有 $x \leq_T y$, $y \leq_T x$, 故 $x=y$, 因此 $(\alpha,x,\beta)=(\alpha,y,\beta)$; 类似可证 "$\leq_V$" 的传递性.

设 $((\alpha,x,\beta),(\alpha,y,\beta)) \in \leq_V$, $(\lambda,z,\rho) \in V$.

$$(\alpha,x,\beta)\circ(\lambda,z,\rho)=(\alpha+[\lambda-\beta], f(\beta-\lambda,x,z), \rho+[\beta-\lambda]).$$

$$(\alpha,y,\beta)\circ(\lambda,z,\rho)=(\alpha+[\lambda-\beta], f(\beta-\lambda,y,z), \rho+[\beta-\lambda]).$$

下面证明 $f(\beta-\lambda,x,z) \leq_V f(\beta-\lambda,y,z)$.

A) 设 $\beta-\lambda>0$. 则 $f(\beta-\lambda,x,z)=x$, $f(\beta-\lambda,y,z)=y$, 由

$$((\alpha,x,\beta),(\alpha,y,\beta)) \in \leq_V,$$

故 $\leq_T y$.

B) 设 $\beta-\lambda=0$. 则 $f(\beta-\lambda,x,z)=x*z$, $f(\beta-\lambda,y,z)=y*z$, 由 $x \leq_T y$,$z \in T$, 以及 $(T,*,\leq_T)$ 是序半群, 故 $x*z \leq_T y*z$.

C) 设 $\beta-\lambda<0$. 则 $f(\beta-\lambda,x,z)=z$, $f(\beta-\lambda,y,z)=z$, 由 $z \in T$, 故 $z \leq_T z$.

综上所述有 $((\alpha,x,\beta)\circ(\lambda,z,\rho),(\alpha,y,\beta)\circ(\lambda,z,\rho)) \in \leq_V$.

4) V 是单的.

设 $(\alpha,x,\beta),(\gamma,y,\delta)\in V$, e 为 T 的单位元, 对 V 中的元 $(\gamma,y,\alpha+1)$, $(\beta+1,e,\delta)$, 我们有

$$(\gamma,y,\delta)\le_V (\gamma,y,\alpha+1)\circ(\alpha,x,\beta)\circ(\beta+1,e,\delta).$$

事实上

$$\begin{aligned}
&(\gamma,y,\alpha+1)\circ(\alpha,x,\beta)\\
=\ &(\gamma+[\alpha-(\alpha+1)],f(\alpha+1-\alpha,y,x),\beta+[\alpha+1-\alpha])\\
=\ &(\gamma+[1],f(1,y,x),\beta+[1])\\
=\ &(\gamma,y,\beta+1).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\gamma,y,\alpha+1)\circ(\alpha,x,\beta)\circ(\beta+1,e,\delta)\\
=\ &(\gamma,y,\beta+1)\circ(\beta+1,e,\delta)\\
=\ &(\gamma+[\beta+1-(\beta+1)],f(\beta+1-(\beta+1),y,e),\\
&\delta+[\beta+1-(\beta+1)])\\
=\ &(\gamma+[0],f(0,y,e),\delta+[0])\\
=\ &(\gamma,y*e,\delta)\\
=\ &(\gamma,y,\delta)\ (y\in T).
\end{aligned}$$

5) $(0,e,0)$ 是 V 的单位元.

设 $(\alpha,x,\beta)\in V$. 则

$$\begin{aligned}
(\alpha,x,\beta)\circ(0,e,0)&=(\alpha+[0-\beta],f(\beta-0,x,e),0+[\beta-0])\\
&=(\alpha+[-\beta],f(\beta,x,e),[\beta]).
\end{aligned}$$

由于 $\beta\in N$, $\beta\ge 0,[\beta]=\beta$, 从而 $-\beta\le 0$, $[-\beta]=0$. 所以我们有

$$(\alpha,x,\beta)\circ(0,e,0)=(\alpha,f(\beta,x,e),\beta).$$

A) 设 $\beta > 0$, 则 $f(\beta, x, e) = x$, 故 $(\alpha, x, \beta) \circ (0, e, 0) = (\alpha, x, \beta)$.

B) 设 $\beta = 0$, 则 $f(\beta, x, e) = x * e = x$, 故 $(\alpha, x, \beta) \circ (0, e, 0) = (\alpha, x, \beta)$.

类似可证, $(0, e, 0) \circ (\alpha, x, \beta) = (\alpha, x, \beta)$.

6) S 可嵌入到 V 中.

我们作映射

$$\varphi : S \to V = N \times T \times N \mid s \to \varphi(s) = (\alpha, s, \alpha),$$

α 为 N 的任意一个固定元素.

A) φ 可定义的.

如果 $s \in S$, 则 $\varphi(s) = (\alpha, s, \alpha) \in N \times S \times N \subseteq N \times T \times N$. 如果 $s = t \in S$, 则 $(\alpha, s, \alpha) = (\alpha, t, \alpha)$, 即 $\varphi(s) = \varphi(t)$.

B) φ 是一个同态映射.

设 $s, t \in S$,

$$\begin{aligned}\varphi(s) \circ \varphi(t) &= (\alpha, s, \alpha) \circ (\alpha, t, \alpha) \\ &= (\alpha + [\alpha - \alpha], f(\alpha - \alpha, s, t), \alpha + [\alpha - \alpha]) \\ &= (\alpha + [0], f(0, s, t), \alpha + [0]) = (\alpha, s * t, \alpha).\end{aligned}$$

而 $s * t = st \in S$, 则 $\varphi(s) \circ \varphi(t) = (\alpha, st, \alpha) = \varphi(st)$.

设 $s, t \in S, s \leq t$. 则 $(s, t) \in \leq \subseteq \leq_T$, 从而 $s \leq_T t$, 因此 $(\alpha, s, \alpha) \leq_V (\alpha, t, \alpha)$, 即 $\varphi(s) \leq_V \varphi(t)$.

C) φ 是反保序的.

设 $s, t \in S, \varphi(s) \leq_V \varphi(t)$. 因 $\varphi(s) = (\alpha, s, \alpha)$, $\varphi(t) = (\alpha, t, \alpha)$, 有 $(\alpha, s, \alpha) \leq_V (\alpha, t, \alpha)$, 所以 $s \leq_T t$. 故 $s \leq t$ 或 $(s, t) = (e, e)$. 如果 $(s, t) = (e, e)$, 那么 $s = t = e$, 而 $e \notin S$, 矛盾. □

下面我们讨论一个序半群嵌入到一个 poe 半群的问题.

序半群 S 的一个子半群 T 称为 S 的拟理想 (pseudoideal) 如果 $(T] = T$.

定理 1.9.3 设 $(S,\cdot,\leq)$ 为序半群，则存在一个 poe 半群 V 和 V 的拟理想 T 使得 $S \cong T$.

证明 设一个元素 $e \notin S$, 作一个集合 $V := S \cup \{e\}$, 我们定义 V 上的乘法运算与二元关系如下：

$$x * y := \begin{cases} xy, & x, y \in S; \\ e, & x \in S, y = e; \\ e, & x = e, y \in S; \\ e, & x = y = e. \end{cases}$$

$$\preceq := \{(x,e) \mid x \in V\} \cup \leq .$$

则 $(V,*,\preceq)$ 是一个序半群且 e 为 V 的最大元. S 为 V 的拟理想，令 $T = (S,*,\preceq)$, 则 $S \cong T$. □

由上 V 的定义不难看出，$(\forall \in V)$ $x \leq xex, x \leq ex^2e$, 故

推论 1.9.4 任何序半群 S 均可以嵌入到一个正则 (内禀正则) poe 半群中.

在定理 1.9.2 中，我们所给出的嵌入同态 φ 一般是不能保证 $\varphi(S)$ 为 V 的理想的，如果没有对 V 是单半群的要求我们可以较容易地得出

命题 1.9.5 设 $(S,\cdot,\leq)$ 为没有单位元的序半群，则存在一个幺序半群 T 和 T 的理想 V 使得 $S \cong V$.

证明 设 $(T,*,\leq_T)$ 如同定理 1.9.2 的证明中所构造的一样，令 $V = (S,*,\leq_T|_S)$, 则 V 为 T 的理想，显然 $S \cong V$. □

如果我们同时要考虑到嵌入幺半群还为有最大元的序半群，则问题要复杂得多，所以现在也没有完全解决 Kehayopulu 的问题 (见 [15]).

定理 1.9.6 设 $(S, \cdot, \leq)$ 为 poe 半群且 S 满足:

1) $e^2 = e$;

2) $(\forall x \in S)\ xe \geq x, ex \geq x$.

则存在一个有单位元的 pof 半群 T, 且存在在 T 的理想 V 使得 $S \cong V$.

证明 我们首先作一个集合 $T = S \cup \{1, f\}$ 且 $S \cap \{1, f\} = \emptyset$, 现在 T 上通过 S 的二元运算和序关系构作 T 上的二元运算和序关系如下:

$$(\forall x, y \in T) \quad x * y = \begin{cases} xy, & x, y \in S; \\ y, & x = 1, y \in T; \\ x, & x \in T, y = 1; \\ ey, & x = f, y \in S; \\ xe, & x \in S, y = f; \\ f, & x = y = f. \end{cases}$$

$$\preceq := \{(x, y) \in S \times S \mid (x, y) \in \leq\} \cup \{(z, f) \mid z \in T\} \cup \{(1, 1)\}.$$

则可以验证 $(T, *, \preceq)$ 为有单位元 1 和最大元 f 的 pof 半群. 又 $(\forall x \in S)\ \ T * x = Sx \cup \{x, xe\} \subseteq S$; $x * T = xS \cup \{x, ex\} \subseteq S$ 且 $\forall y \in T$, $y \preceq x$ 可得 $y \in S$, 故 $V = (S, *, \preceq|_S)$ 为 T 的理想, 显然 $S \cong V$. □

由上定理的证明可以看出, 如果 S 为正则 (内禀正则) 序半群, 不难验证 $(T, *, \preceq)$ 也为正则 (内禀正则) 序半群. 如果 S 为正序 poe 半群, 则 $e^2 = e$, 且 $xe \geq x$, $ex \geq x$, 故我们有

推论 1.9.7 设 $(S, \cdot, \leq)$ 为正序 poe 半群, 则存在有单位元的 pof 半群 T 使 S 为其子 poe 半群且如果 S 为正则 (内禀正则) 的, 则 T 也为正则 (内禀).

本节所涉及的很多验证均没有去做, 详细证明请读者参见 [15—18] 等.

第二章　正则同余

设 S 为序半群，ρ 为 S 的同余. 一般情况下，S/ρ 不一定为序半群. 即使存在序关系 $\preceq$ 使得 $(S/\rho, \cdot, \preceq)$ 是序半群，那么 S 到 S/ρ 也不一定有保序同态存在. 本章主要讨论序半群上带有限制条件的一类同余.

§1　完全半格同余

设 σ 为序半群 $(S, \cdot, \leq)$ 的半格同余，σ 称为完全的，如果

$$(\forall a, b \in S) \quad a \leq b \Rightarrow (a, ab) \in \sigma.$$

早在 1990 年，N. Kehayopulu 就提出以下问题：$\mathcal{N}$ 是否为 S 的最小半格同余？该问题分别被 Kehayopulu 本人、谢祥云、J.Jakubik 和高振林解决，见 [19—22].

定义 2.1.1　设 F 为 S 的滤子，$a \in S$，F 称为 a 极大的，如果 F 是关于不包含 a 极大的.

我们用 $\mathrm{val}(a)$ 表示 S 的所有 a 极大滤子. 则我们有

定理 2.1.2　设 S 为序半群，则 $(x, y) \in \mathcal{N}$ 当且仅当 $\mathrm{val}(x) = \mathrm{val}(y)$.

证明　设 $(x, y) \in \mathcal{N}$，则 $N(x) = N(y)$. 设 $F \in \mathrm{val}(x)$，则 $x \notin F$，我们有 $y \notin F$，否则 $y \in N(y) \subseteq F$，有 $x \in N(x) = N(y) \subseteq F$，矛盾. 进一步，有 $F \in \mathrm{val}(y)$. 如果 $F \notin \mathrm{val}(y)$，由 Zorn 引理存在使得 $F \subseteq F_1$ 且 $y \notin F_1$ 的 S 的极大滤子 F_1. 如果 $x \notin F_1$，和 $F \in \mathrm{val}(x)$ 矛盾，如果 $x \in F_1$，则 $y \in N(y) = N(x) \subseteq F_1$ 和 $y \notin F_1$ 矛盾. 同理可证 $\mathrm{val}(y) \subseteq \mathrm{val}(x)$.

反之，$\forall x,y\in S$，设 $\mathrm{val}(x)=\mathrm{val}(y)$．如果 $x\notin N(y)$，由 Zorn 引理，存在 $F\in\mathrm{val}(x), N(y)\subseteq F$，那么 $y\in F$ 和 $\mathrm{val}(x)=\mathrm{val}(y)$ 矛盾．故 $x\in N(y)$，即 $N(x)\subseteq N(y)$．同理可证 $N(y)\subseteq N(x)$． □

定义 2.1.3 设 $(S,\cdot,\leq)$ 和 $(T,*,\leq_1)$ 为两个序半群，f 称为 S 到 T 的同态映射，如果 f 满足：

(1) $(\forall x,y\in S)\ \ f(x\cdot y)=f(x)*f(y)$;

(2) $x\leq y\ \Rightarrow\ f(x)\leq_1 f(y)$.

引理 2.1.4 $\mathcal{N}$ 是 S 的完全半格同余.

证明 由命题 1.3.3, $\mathcal{N}$ 是 S 的半格同余．设 $x\leq y$，则 $x,y\in N(x)$，则 $xy\in N(x)$，故 $N(xy)\subseteq N(x)$．又 $xy\in N(xy)$，故 $x\in N(xy)$，当然 $N(x)\subseteq N(xy)$．因此 $(x,xy)\in\mathcal{N}$． □

引理 2.1.5 设 S 和 T 为序半群，f 为从 S 到 T 的同态，设 F 为 T 的滤子且 $f^{-1}(F)\neq\phi$，则 $f^{-1}(F)$ 是 S 的滤子.

证明

$$\begin{aligned}(\forall x,y\in S)\ \ xy\in f^{-1}(F)\ &\Longleftrightarrow\ f(xy)=f(x)f(y)\in F\\ &\Longleftrightarrow\ f(x),f(y)\in F\\ &\Longleftrightarrow\ x,y\in f^{-1}(F).\end{aligned}$$

又设 $x\in f^{-1}(F), y\in S$ 且 $x\leq y$，那么 $f(x)\in F$ 且 $f(x)\leq f(y)$，故 $f(y)\in F$，从而 $y\in f^{-1}(f)$． □

命题 2.1.6 设 σ 为序半群 S 的完全半格同余，如果 $(x,y)\in\mathcal{N}$，则 $((x)_\sigma,(y)_\sigma)\in\mathcal{N}_{S/\sigma}$.

证明 设 $N((x)_\sigma)\neq N((y)_\sigma)$，那么 $(x)_\sigma\notin N((y)_\sigma)$，或 $(y)_\sigma\notin N((x)_\sigma)$．如果 $(x)_\sigma\notin N((y)_\sigma)$，类似于定理 2.1.2 的证明，存在 $F\in\mathrm{val}((x)_\sigma)$，使得 $(y)_\sigma\in F$．令 f 为 S 到 S/σ 的自然同态，则 f 为序半群 S 到半格 S/σ (也为序半群) 的同态．由

引理 2.1.5, $f^{-1}(F)$ 为 S 的滤子且 $x \notin f^{-1}(F), y \in f^{-1}(F)$. 这样, $\mathrm{val}(x) \neq \mathrm{val}(y)$, 由定理 2.1.3, $(x,y) \notin \mathcal{N}$, 矛盾. □

设 S 为半格, 显然 $N(x) = [x)$.

定理 2.1.7 $\mathcal{N}$ 为 S 的最小完全半格同余.

证明 设 σ 为 S 的完全半格同余, $(x,y) \in \mathcal{N}$, 由命题 2.1.6, 则 $((x)_\sigma, (y)_\sigma) \in \mathcal{N}_{S/\sigma}$, 即 $N((x)_\sigma) = N((y)_\sigma)$, 又 $N((x)_\sigma) = [(x)_\sigma), N((y)_\sigma) = [(y)_\sigma)$, 故 $(x)_\sigma = (y)_\sigma$, 即 $(x,y) \in \sigma$. □

一般情况, $\mathcal{N}$ 不一定为 S 的最小半格同余.

例 2.1.8 设 S 为非负整数乘法半群, $\leq$ 为 S 上的自然线性序, 设 $\leq^d$ 为 S 上线性序 $\leq$ 的对偶序, 则 $S^d = (S, \cdot, \leq^d)$ 为线性序半群. 设 F 为 S^d 的滤子, 显然 $F = S$, 因此 $\mathcal{N} = S \times S$. 我们定义

$$\sigma := \{(x,y) \in S \times S \mid (x = y = 0) \bigvee (x \neq 0, y \neq 0)\}.$$

则 σ 为 S^d 上的半格同余, 显然 $\sigma \subset \mathcal{N}$.

我们还可以通过 S 的半素理想来刻画 $\mathcal{N}$, 这部分都在第三章论述.

§2 拟序与正则同余

定义 2.2.1 设 $(S, \cdot, \leq)$ 是序半群. S 上的一个二元关系 σ 称为 S 的拟序 (pseudoorder), 如果 σ 满足:

1) $\leq \subseteq \sigma$;
2) 设 $(a,b) \in \sigma, (b,c) \in \sigma$, 则 $(a,c) \in \sigma$;
3) 设 $(a,b) \in \sigma$, 则 $(ac, bc), (ca, cb) \in \sigma, \quad \forall c \in S$.

显然 S 的拟序是 S 上包含 $\leq$ 且是传递、相容的二元关系.

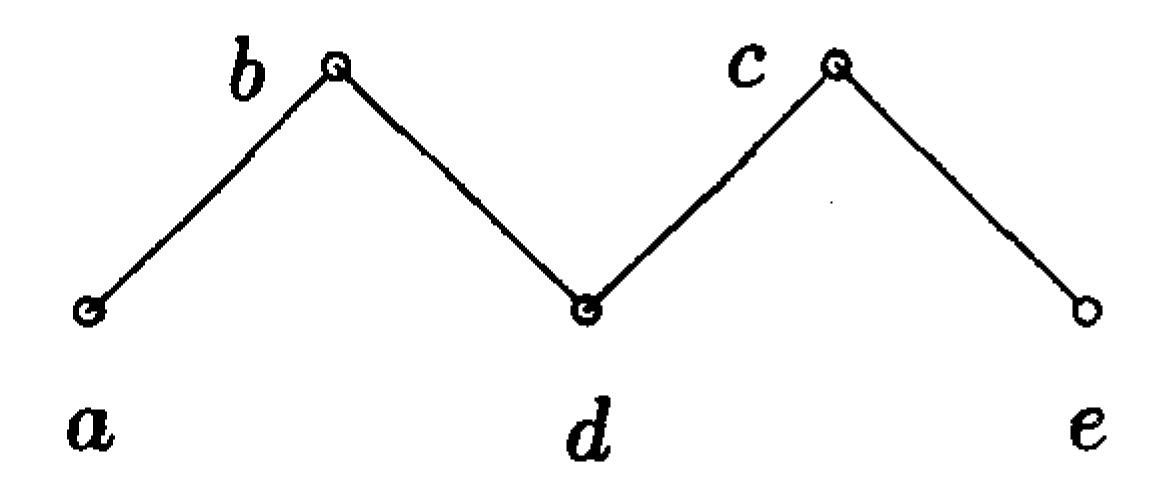
例 2.2.2 设 $S = \{a, b, c, d, e\}$, 我们在 S 上定义乘法 “$\cdot$” 如下:

·	a	b	c	d	e
a	b	b	d	d	d
b	b	b	d	d	d
c	d	d	c	d	c
d	d	d	d	d	d
e	d	d	c	d	c

且我们给出 $(S,\cdot)$ 上的覆盖序关系 "$\prec$":

$$\prec:=\{(a,b),(d,b),(d,c),(e,c)\}.$$

则 "$\prec$" 的 Hassen 图为:



不难验证 $(S,\cdot,\preceq)$ 是一个序半群. S 的二元关系

$$\begin{aligned}\sigma:\ =\ &\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(a,c),\\&(a,d),(b,a),(b,c),(b,d),(d,a),(d,b),(d,c),(e,c)\}\end{aligned}$$

即为 S 上的一个拟序.

定义 2.2.3 设 S 是一个序半群, ρ 为 S 的同余, ρ 称为 S 的正则同余 (regular congruence) 如果在商半群 S/ρ 上存在序关系 "$\preceq$" 满足:

1) $(S/\rho,\cdot,\preceq)$ 是一序半群 (这里 "·" 是 S/ρ 上通常的乘法运算 $(x)_\rho\cdot(y)_\rho:=(xy)_\rho$, $\forall x,y\in S$).

2) 映射

$$\varphi:S\to S/\rho\mid x\to(x)_\rho$$

是保序的, 即序半群 S 到序半群 S/ρ 存在同态映射.

显然序半群 S 的所有同余中，最大同余 $\pi = S \times S$ 与最小同余 $\iota =: \{(x, y) \mid x = y\}$ 是正则同余. 我们自然要问，是否 S 的所有同余均为正则同余呢？我们下面给一例子说明一般序半群 S 中存在非正则的同余.

例 2.2.4 设 $S = \{a, b, c, d, e\}$, 我们定义 S 上的乘法为 $x \cdot y = e$, $\forall x, y \in S$, 定义 S 上的覆盖序关系为

$$\prec := \{(a, b), (d, c), (e, d), (e, a), (b, c)\}.$$

则 $(S, \cdot, \leq)$ 是序半群. 设 σ 为 S 上的等价关系且

$$S/\sigma := \{\{a, b\}, \{c, d, e\}\},$$

那么 σ 为 S 上的同余关系且 σ 的每个同余类 $(x)_\sigma, \forall x \in S$ 是凸的. 我们可以断言 σ 不是正则同余，否则存在 S/σ 上的序关系 $\preceq$ 使得 $(S/\sigma, \cdot, \preceq)$ 是序半群且自然映射 $\varphi : S \to S/\sigma$ 是同态映射. 因为 $e \leq a$, 我们有 $(e)_\sigma \preceq (a)_\sigma$. 又因为 $b \leq c$, 我们有 $(b)_\sigma \preceq (c)_\sigma$. 因此 $(b)_\sigma = (a)_\sigma \preceq (c)_\sigma = (e)_\sigma \preceq (a)_\sigma$, 即 $(e)_\sigma = (a)_\sigma$, 不可能成立.

完全半格同余一定是正则半格同余，但一般情况下，正则半格同余不一定为完全半格同余.

命题 2.2.5 设 $(S, \cdot, \leq)$ 是序半群，I 为 S 的理想. 则以下各款成立：

1) $\rho_I =: (I \times I) \cup \{(x, y) \in S \times S \mid x = y\}$ 是 S 的同余；

2) $S/\rho_I = \{\{x\} \mid x \in S \backslash I\} \cup \{I\}$.

证明 1) 不难验证 ρ_I 为 S 上的等价关系. 设 $(x, y) \in \rho_I, z \in S$, 则 $(zx, zy) \in \rho_I$. 事实上,

A) 如果 $(x, y) \in I \times I$, 则 $zx, zy \in I$, 有 $(zzx, zy) \in I \times I \subseteq \rho_I$.

B) 如果 $x = y \in S$, 显然 $(zx, zy) \in \rho_I$.

同理可证 $(xz, yz) \in \rho_I$.

2) 设 $(a)_{\rho_I} \in S/\rho_I$. 如果 $a \in I$, 则 $(a)_{\rho_I} = I$. 如果 $a \notin I$, 设 $(a,b) \in \rho_I$, 则 $b = a$, 故 $(a)_{\rho_I} = \{a\}$. □

上述同余 ρ_I 我们称为序半群 S 的 Rees 同余.

定理 2.2.6 设 $(S,\cdot,\leq)$ 是序半群, I 为 S 的理想, 则 S/ρ_I 为 S 的正则同余.

证明 由命题 2.2.5, 我们可以看出 $(S/\rho_I,\cdot)$ (关于商半群的通常乘法) 是一个半群. 我们下面引入 S/ρ_I 上的一个二元关系

$$\begin{aligned}\preceq:\ &= \{(I,\{x\}) \mid x \in S\backslash I\}\\ &\cup\{(\{x\},\{y\}) \mid x,y \in S\backslash I, x \leq y\} \cup \{(I,I)\}.\end{aligned}$$

1) "$\preceq$" 是 S/ρ_I 上的偏序关系. 设 $(x)_{\rho_I} \in S/\rho_I$, 那么 $(x)_{\rho_I} = \{x\}, x \in S\backslash I$ 或 $(x)_{\rho_I} = I$. 如果 $(x)_{\rho_I} = \{x\}$, 因为 $x \leq x$, 那么 $(\{x\},\{x\}) \in \preceq \Rightarrow (x)_{\rho_I} \preceq (x)_{\rho_I}$; 如果 $(x)_{\rho_I} = I$; 因为 $(I,I) \in \preceq$, 我们有 $(x)_{\rho_I} \preceq (x)_{\rho_I}$.

设 $(x)_{\rho_I} \preceq (y)_{\rho_I}, (y)_{\rho_I} \preceq (x)_{\rho_I}$, 我们有以下情形:

情形 I: $(x)_{\rho_I} = \{x\}, x \in S\backslash I$. 因为 $(x)_{\rho_I} \preceq (y)_{\rho_I}$, 必有 $y \in S\backslash I$, 且 $x \leq y, (y)_{\rho_I} = \{y\}$. 又 $(y)_{\rho_I} \preceq (x)_{\rho_I}$, 同理有 $(x)_{\rho_I} = \{x\}, x \in S\backslash I$ 且 $y \leq x$. 因此 $x = y$, 即 $(x)_{\rho_I} = (y)_{\rho_I}$.

情形 II: $(x)_{\rho_I} = I$. 由 $(x)_{\rho_I} \preceq (y)_{\rho_I}$, 则 $(y)_{\rho_I} = I$ 或 $(y)_{\rho_I} = \{y\}$. 如果 $(y)_{\rho_I} = I$, 则 $(x)_{\rho_I} = (y)_{\rho_I}$. 如果 $(y)_{\rho_I} = \{y\}$, 由 $(y)_{\rho_I} \preceq (x)_{\rho_I}$, 则 $(x)_{\rho_I} = \{x\}, x \in S\backslash I$, 矛盾.

设 $(x)_{\rho_I} \preceq (y)_{\rho_I}, (y)_{\rho_I} \preceq (z)_{\rho_I}$, 我们可以通过类似的推导方法得出 $(x)_{\rho_I} \preceq (z)_{\rho_I}$.

2) $(S/\rho_I,\cdot,\preceq)$ 是序半群, 即证 "$\preceq$" 关于 S/ρ_I 的乘法运算是相容的. 设

$$(x)_{\rho_I} \preceq (y)_{\rho_I}, (z)_{\rho_I} \in S/\rho_I,$$

则 $(z)_{\rho_I} = \{z\}$ 或 $(z)_{\rho_I} = I$. 如果 $(z)_{\rho_I} = I$, 则 $(z)_{\rho_I} =$

$(t)_{\rho_I}, t \in I$. 因此,

$$(z)_{\rho_I}(x)_{\rho_I} = (zx)_{\rho_I} = (tx)_{\rho_I} = I, (z)_{\rho_I}(y)_{\rho_I} = I,$$

故 $(z)_{\rho_I}(x)_{\rho_I} = (z)_{\rho_I}(y)_{\rho_I}$. 如果 $(z)_{\rho_I} = \{z\}, z \in S\backslash I$. 当 $(x)_{\rho_I} = \{x\}, x \in S\backslash I$, 则 $(y)_{\rho_I} = \{y\}$, 且 $x \leq y$, 而且 $zx \leq zy$. 当 $zy \in I$, 则 $zx \in I$, 从而 $(zx)_{\rho_I} = (zy)_{\rho_I}$. 当 $zy \notin I$, 则不论 $zx \in I$ 或 $zx \notin I$, 均有 $(zx)_{\rho_I} \preceq (zy)_{\rho_I}$. 当 $(x)_{\rho_I} = I$ 时, 显然 $(zx)_{\rho_I} = I$, 从而 $(zx)_{\rho_I} \preceq (zy)_{\rho_I}$. 同理我们可证右相容性.

3) 由 S/ρ_I 上二元关系 $\preceq$ 的定义, 我们不难看出

$$\varphi : S \ \mapsto \ S/\rho_I$$

是保序的. □

定理 2.2.7 设 I 是序半群 S 的理想, $\mathcal{A}$ 为 S 的包含 I 的理想集, $\mathcal{B}$ 是序半群 $(S/\rho_I, \cdot, \preceq)$ (这里 $\preceq$ 关系如同定理 2.2.6) 的理想集. 我们定义 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的映射 θ: $J \mapsto (J)_{\rho_I}$. 则 θ 是一一保序映射.

证明 1) 设 $J \in \mathcal{A}$. 不难得出 $(J)_{\rho_I}$ 是 S 的半群结构的理想. 设 $(x)_{\rho_I} \preceq (y)_{\rho_I}, (y)_{\rho_I} \in S/\rho_I$, 那么存在 $j \in J$, 使得 $(y)_{\rho_I} = (j)_{\rho_I}$.

如果 $x \in I$, 那么 $x \in J$, 显然 $(x)_{\rho_I} \in (J)_{\rho_I}$.

如果 $x \notin I$, 则 $(x)_{\rho_I} = \{x\} \in S\backslash I$, 因为 $(x)_{\rho_I} \preceq (y)_{\rho_I}$, 这时 $(y)_{\rho_I} = (j)_{\rho_I} = \{j\}, j \in S\backslash I$ 且 $x \leq j$, 因此 $x \in J$, 即 $(x)_{\rho_I} \in (J)_{\rho_I}$.

2) θ 是单射. 事实上, 设 $J_1, J_2 \in \mathcal{A}$ 且 $J_1 \neq J_2$, 那么存在 $j_1 \in J_1\backslash J_2$ 或 $j_2 \in J_2\backslash J_1$. 设 $j_1 \in J_1\backslash J_2$, 那么 $(j_1)_{\rho_I} = \{j_1\} \notin (J_2)_{\rho_I}$.

3) θ 是满射. 设 K 为 S/ρ_I 的理想, 令

$$J = \{x \in S \mid (x)_{\rho_I} \in K\},$$

则不难验证 J 为 S 的理想且包含 I (读者练习验证). θ 的保序性显然. □

下面我们讨论拟序与正则同余的关系.

引理 2.2.8 设 $(S,\cdot,\leq)$ 是序半群, $\sigma\subseteq S\times S$. 则下列结论是等价的:

1) σ 为 S 的拟序.

2) 存在序半群 $(T,*,\preceq)$ 及同态映射 $\varphi:S\to T$ 使得

$$\sigma=\{(a,b)\in S\times S\mid \varphi(a)\preceq\varphi(b)\ \}.$$

证明 1) $\Longrightarrow$ 2) 设 σ 为 S 的拟序. 令 $\rho=\sigma\cap\sigma^{-1}$, 则 ρ 为 S 的同余. 在商半群 $(S/\rho,*)$ 上定义二元关系

$$\preceq:=\{\ ((x)_\rho,(y)_\rho)\mid (x,y)\in\sigma\ \},$$

则

A) 设 $(a)_\rho=(x)_\rho,(b)_\rho=(y)_\rho,(x,y)\in\sigma$, 则 $(a,b)\in\sigma$. 事实上, 因为 $(a,x),(b,y)\in\sigma\cap\sigma^{-1}$, 所以 $(a,b)\in\sigma^3\subseteq\sigma$.

B) 我们可以验证 $(S/\rho,*,\preceq)$ 是一个序半群 (留作练习). 设 $(a,b)\in\sigma$, 显然

$$\varphi(a)=(a)_\rho\preceq(b)_\rho=\varphi(b).$$

反之, 如果 $\varphi(a)\preceq\varphi(b)$, 由 $\preceq$ 的定义可知 $(a,b)\in\sigma$.

2) $\Longrightarrow$ 1) 因为 φ 为序半群 S 到 T 的同态, 故 φ 为保序的. 设 $(x,y)\in\leq$, 则 $\varphi(x)\preceq\varphi(y)$, 因此, $(x,y)\in\sigma$. 由设 $(a,b)\in\sigma,(b,c)\in\sigma$, 则

$$\varphi(a)\preceq\varphi(b),\varphi(b)\preceq\varphi(c),$$

从而 $\varphi(a)\preceq\varphi(c)$, 故 $(a,c)\in\sigma$. 同理可验证 σ 的相容性. □

定理 2.2.9 设 $(S,\cdot,\leq)$ 是序半群， ρ 为 S 的同余. 则下列各款等价：

1) ρ 为正则同余.

2) 存在一个序半群 $(T,*,\preceq)$ 和同态映射 $\varphi: S\mapsto T$ 使得

$$\rho=\{(a,b)\mid \varphi(a)=\varphi(b)\}.$$

3) 存在 S 的拟序 σ，使得 $\rho=\sigma\cap\sigma^{-1}$.

证明 1) $\Longrightarrow$ 2) 设 ρ 为正则同余，则存在序半群 $(S/\rho,*,\preceq)$ 使得

$$\varphi: S\mapsto S/\rho \quad | \quad a\to(a)_\rho$$

是同态. 显然

$$\rho=\{(a,b)\mid \varphi(a)=\varphi(b)\}.$$

2) $\Longrightarrow$ 3) 由引理 2.2.8,

$$\sigma:=\{(a,b)\quad|\quad \varphi(a)\preceq\varphi(b)\}$$

为 S 的拟序，显然 $\rho=\sigma\cap\sigma^{-1}$.

3) $\Longrightarrow$ 1) 从引理 2.2.8 的证明可以得出. □

值得注意的是对每一个正序同余 ρ 而言，商半群 $(S/\rho,\cdot)$ 上存在的序关系 $\preceq$ 一般情况下不是惟一的，故包含 ρ 的拟序不是惟一的. 事实上，设 σ 是拟序， $\rho=\sigma\cap\sigma^{-1}$ 是 S 的包含在 σ 中的最大的正则同余. 因为设 ρ_1 为包含在 σ 中的 S 的正则同余，则 $\rho_1=\rho_1\cap\rho_1^{-1}\subseteq\sigma\cap\sigma^{-1}=\rho$.

命题 2.2.10 设 ρ 是序半群 $(S,\cdot,\leq)$ 的正则同余， σ 是 S 的包含 ρ 的最小的拟序，则 σ 是 S 上的二元关系 $\leq\circ\rho$ (或 $\rho\circ\leq$) 的传递闭包，即

$$\sigma=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\leq\circ\rho)^n=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\rho\circ\leq)^n.$$

证明 设 $\sigma_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\leq \circ\rho)^n$，显然 $\leq\subseteq\leq \circ\rho \subseteq \sigma_1$，且 σ_1 为传递的. 因为 $\leq$ 与 ρ 是 S 上的相容关系，故 σ_1 是相容的，因此 σ_1 为 S 上的拟序，由假设 $\sigma \subseteq \sigma_1$，又 $\leq,\rho \subseteq \sigma$ 可推出 $\leq \circ\rho \subseteq \sigma$，从而 $\sigma_1 \subseteq \sigma$，故 $\sigma = \sigma_1$. □

序半群 $(S,\cdot,\leq)$ 上的正则同余称为强正则的，如果 $\rho\circ \leq\subseteq\leq \circ\rho$. 由命题 2.2.10，我们有

推论 2.2.11 设 ρ 是 $(S,\cdot,\leq)$ 上的强正则同余且 σ 为包含 ρ 的最小拟序，则 $\sigma =\leq \circ\rho$.

证明 因为 ρ 是强正则的，我们有

$$(\leq \circ\rho)^2 =\leq \circ(\rho\circ \leq) \circ \rho \subseteq\leq \circ(\leq \circ\rho) \circ \rho \subseteq\leq \circ\rho,$$

故

$$\sigma = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\leq \circ\rho)^n =\leq \circ\rho.$$

由强正则同余的定义，设 $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 为序半群 S 的强正则同余簇，读者可以证明

$$(\prod_{\alpha\in\Gamma} \rho_\alpha)\circ \leq \subseteq \leq \circ(\prod_{\alpha\in\Gamma} \rho_\alpha).$$ □

设 σ 为 S 的拟序，则 $\rho = \sigma \cap \sigma^{-1}$ 为 S 的正则同余，$\rho^\#$ 表示 S 到 S/ρ 的同态. 在本节的最后，我们证明序半群同态的两个基本定理.

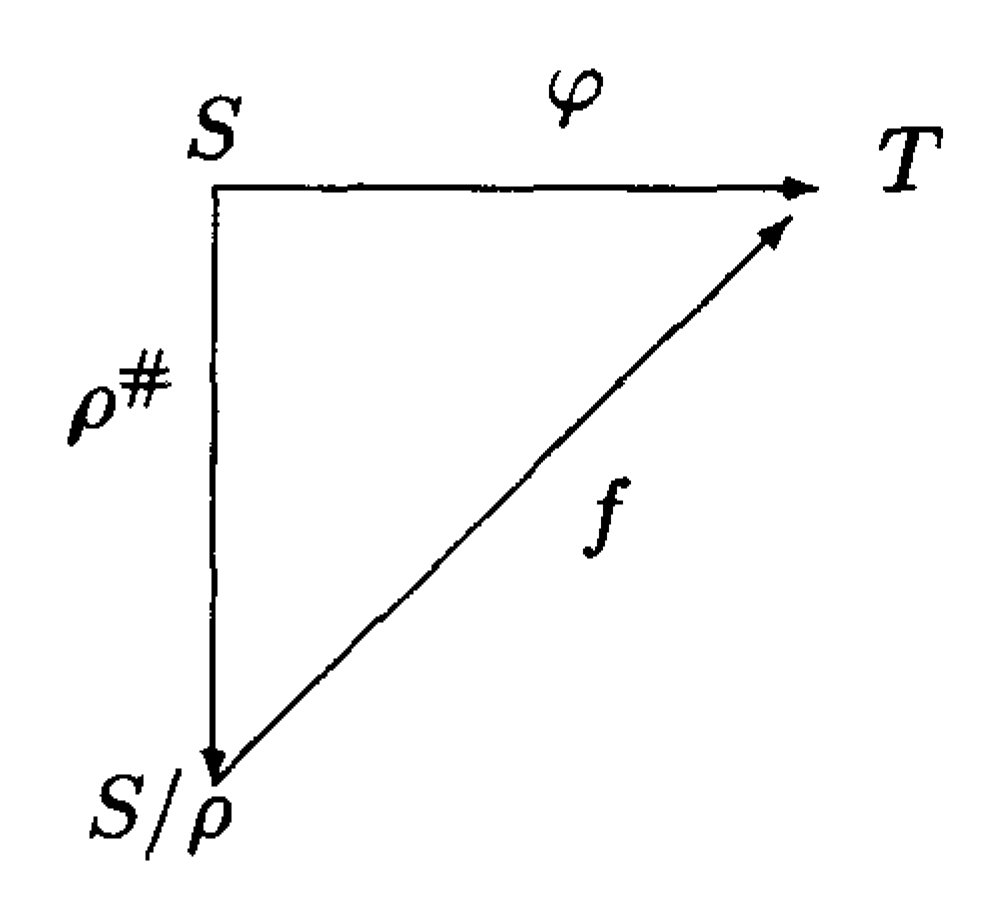
定理 2.2.12 设 $(S,\cdot,\leq_S)$, $(T,*,\leq_T)$ 为序半群且 φ 为 S 到 T 的同态映射，设

$$\tilde{\varphi} := \{(a,b) \mid \varphi(a) \leq_T \varphi(b)\}$$

且 σ 为 S 的拟序，满足 $\sigma \subseteq \tilde{\varphi}$, 那么映射

$$f : S/\rho \mapsto T \mid (a)_\rho \to \varphi(a)$$

是 S/ρ 到 T 的惟一的同态映射，这里 $\rho = \sigma \cap \sigma^{-1}$, 而且下图可换，进一步地有 $\mathrm{ran}(f) = \mathrm{ran}(\varphi)$. 反之，设 σ 为 S 上的拟序使得 $f : S/(\sigma \cap \sigma^{-1}) \mapsto T$ 满足 $\varphi = f \circ \rho^{\#}$, 那么 $\sigma \subseteq \tilde{\varphi}$.



证明 1) f 是可定义的，因为设 $(a)_\rho = (b)_\rho$, 则 $(a, b) \in \sigma$, 因 $\sigma \subseteq \tilde{\varphi}$, 有 $(\varphi(a), \varphi(b)) \in \leq_T$; 又 $(b, a) \in \tilde{\varphi}$, 从而 $(\varphi(b), \varphi(a)) \in \leq_T$, 故 $\varphi(a) = \varphi(b)$.

2) f 为同态映射且 $\varphi = f \circ \rho^{\#}$, 事实上，因为

$$f((a)_\rho(b)_\rho) = f((ab)_\rho) = \varphi(ab) = \varphi(a) * \varphi(b) = f((a)_\rho) * f((b)_\rho);$$

$$\begin{aligned} & (a)_\rho \preceq (b)_\rho \Leftrightarrow (a, b) \in \sigma \subseteq \tilde{\varphi} \\ \Rightarrow \quad & \varphi(a) \leq_T \varphi(b) \Leftrightarrow f((a)_\rho) \leq_T f((b)_\rho). \end{aligned}$$

$$f \circ \rho^{\#}(a) = f((a)_\rho) = \varphi(a).$$

又设 g 为序半群 S/ρ 到 T 的同态映射且 $g \circ \rho^{\#} = \varphi$, 则

$$f((a)_\rho) = \varphi(a) = (g \circ \rho^{\#})(a) = g((a)_\rho).$$

而 $\mathrm{ran}(f) = \{f((a)_\rho) \mid a \in S\} = \{\varphi(a) \mid a \in S\} = \mathrm{ran}(\varphi)$.

反之，由假设

$$\begin{aligned}(a,b)\in\sigma &\Longrightarrow (a)_\rho\preceq(b)_\rho\Longrightarrow f((a)_\rho)\leq_T f((b)_\rho)\\ &\Longrightarrow (f\circ\rho^{\#})(a)\leq_T(f\circ\rho^{\#})(b)\\ &\Longrightarrow \varphi(a)\leq_T\varphi(b)\Longrightarrow(a,b)\in\tilde{\varphi}.\end{aligned}$$

在以上证明过程，$\preceq$ 为 S/ρ 上的序关系，如同引理 2.2.8 中的证明，

$$\preceq=\{((x)_\rho,(y)_\rho)\mid(x,y)\in\sigma\}.$$

□

设 S,T 为序半群，如果 f 是满射且为 S 到 T 的反保序的同态映射，我们称 f 为序半群 S 到 T 的同构映射．我们不难看出 f 为反保序的，即 $f(x)\leq_T f(y)\Longrightarrow x\leq_S y$，必有 f 为单射．如果 S 与 T 之间存在同构映射，我们称 S 和 T 同构，记为 $S\cong T$.

推论 2.2.13 设 $(S,\cdot,\leq_S)$ 和 $(T,*,\leq_T)$ 为序半群，$\varphi: S\mapsto T$ 为同态，那么

$$S/\mathrm{Ker}\varphi\cong\mathrm{ran}(\varphi).$$

证明 在定理 2.2.12 中，取 $\sigma=\tilde{\varphi}$，设 $\rho=\tilde{\varphi}\cap\tilde{\varphi}^{-1}$，则 ρ 为正则同余且

$$f:S/\rho\mapsto T\mid(a)_\rho\to\varphi(a)$$

是同态．我们下面证明 f 是反保序的．设 $\varphi(a)\leq_T\varphi(b)$，则 $(a,b)\in\tilde{\varphi}$，因为 S/ρ 上的序关系 $\preceq$，我们可以从引理 2.2.8 中看出

$$((a)_\rho,(b)_\rho)\in\preceq$$

当且仅当 $(a,b)\in\tilde{\varphi}$，故 $((a)_\rho,(b)_\rho)\in\preceq$．因为 $\rho=\mathrm{Ker}\varphi$，故 $S/\mathrm{Ker}\varphi\cong\mathrm{ran}(\varphi)$. □

设 S 为序半群， ρ,σ 均为 S 上的拟序而且 $\rho\subseteq\sigma$ ，我们这时可以定义序半群 $(S/\bar{\rho},\cdot,\leq_{\bar{\rho}})$ 上的拟序

$$\sigma/\rho:=\{((a)_{\bar{\rho}},(b)_{\bar{\rho}})\mid(a,b)\in\sigma\},$$

这里 $\leq_{\bar{\rho}}:=\{((a)_{\bar{\rho}},(b)_{\bar{\rho}})\mid(a,b)\in\rho\},\bar{\rho}=\rho\cap\rho^{-1}$. 事实上，我们不难验证 σ/ρ 中元素和代表元选取无关，而且 $\leq_{\bar{\rho}}\subseteq\sigma/\rho$, 显然 σ/ρ 是传递及相容的.

定理 2.2.14 设 S 为序半群， ρ 与 σ 为 S 上的拟序且 $\rho\subseteq\sigma$, 则 $S/\bar{\rho}/\overline{\sigma/\rho}\cong S/\bar{\sigma}$.

证明 由上说明 σ/ρ 为 $S/\bar{\rho}$ 上的拟序，我们作映射 φ : $S/\bar{\rho}\mapsto S/\bar{\sigma}\mid(a)_{\bar{\rho}}\to(a)_{\bar{\sigma}}$. 则

1) φ 是可定义的. 因为 $(a)_{\bar{\rho}}=(b)_{\bar{\rho}}$ 可推出 $(a)_{\bar{\sigma}}=(b)_{\bar{\sigma}}$.

2) φ 为同态满射，显然 φ 为满射. 设

$$(a)_{\bar{\rho}}\leq_{\bar{\rho}}(b)_{\bar{\rho}}\Rightarrow(a,b)\in\rho\Rightarrow(a,b)\in\sigma\Rightarrow(a)_{\bar{\sigma}}\leq_{\bar{\sigma}}(b)_{\bar{\sigma}},$$

φ 保运算是显然的.

3) 令 $\tilde{\varphi}:=\{((a)_{\bar{\rho}},(b)_{\bar{\rho}})\mid\varphi((a)_{\bar{\rho}})\leq_{\bar{\sigma}}\varphi((b)_{\bar{\rho}})\}$, 则

$$\begin{aligned}((a)_{\bar{\rho}},(b)_{\bar{\rho}})\in\tilde{\varphi}\quad&\Longleftrightarrow\quad(a)_{\bar{\sigma}}\leq_{\bar{\sigma}}(b)_{\bar{\sigma}}\Longleftrightarrow(a,b)\in\sigma\\&\Longleftrightarrow\quad((a)_{\bar{\rho}},(b)_{\bar{\rho}})\in\sigma/\rho.\end{aligned}$$

故 $\mathrm{Ker}\varphi=\tilde{\varphi}\cap\tilde{\varphi}=\sigma/\rho\cap(\sigma/\rho)^{-1}=\overline{\sigma/\rho}$. 由推论 2.2.13 ，定理得证.

§3 正则同余类

本节我们将证明一个序半群 S 的素理想可以分解为 $\mathcal{N}$ 类的并. 主要讨论 S 的什么样的子集可以作为 S 的某个正则同余的同余类.

定理 2.3.1 设 S 为序半群，$z \in S$. 又设 I 为 $(z)_{\mathcal{N}}$ 的理想，则 I 不含真的素理想.

证明 由滤子与素理想的关系，证 I 不含真的素理想，即证 I 不含真的滤子. 设 F 为 I 的滤子，取 $a \in F$, 令 $T := \{x \in S \mid a^2x \in F\}$. 我们分两步证明：

1) $F = T \cap I$. 设 $y \in F$, 因 $a^2 \in F$, 故 $a^2y \in F$, 从而 $y \in T$. 由 $y \in I$, 得 $F \subseteq T \cap I$. 又设 $y \in T \cap I$, 则 $a^2y \in F$, 故 $y \in F$. 又 $a^2, y \in I$, 从而 $T \cap I \subseteq F$.

2) T 为 S 的滤子. 设 $xy \in T$, 则 $x \in T, y \in T$ (证明类似于 [13] 中 II.2.11 定理，略). 设 $x, y \in T$, 则 $x, y \in F \subseteq I$, 从而 $xy \in F, a^2xy \in F$, 故 $xy \in T$.

设 $x \in T, y \geq x$, 则 $a^2y \geq a^2x \in F$. 如果能证 $a^2y \in I$, 我们有 $y \in T$. 因为 $a^2y = a(ay), a \in F \subseteq I$, 又 $a^2x \in F \subseteq I \subseteq (z)_{\mathcal{N}} = (a^2x)_{\mathcal{N}} = (ax)_{\mathcal{N}}$, 从 $x \leq y$, 得 $ax \leq ay$, 从而 $(axay, ax) \in \mathcal{N}$. 故

$$\begin{aligned}(ax)_{\mathcal{N}} &= (axay)_{\mathcal{N}} = (a^2x)_{\mathcal{N}}(y)_{\mathcal{N}} = (z)_{\mathcal{N}}(y)_{\mathcal{N}} \\ &= (a)_{\mathcal{N}}(y)_{\mathcal{N}} = (ay)_{\mathcal{N}}.\end{aligned}$$

因此 $ay \in (ax)_{\mathcal{N}} = (z)_{\mathcal{N}}$. 因为 I 为 $(z)_{\mathcal{N}}$ 的理想, 故 $a(ay) \in I$.

3) 设 $T \cap (z)_{\mathcal{N}} \neq \phi$, 取 $a \in T \cap (z)_{\mathcal{N}}, \forall y \in (z)_{\mathcal{N}}, (y)_{\mathcal{N}} = (z)_{\mathcal{N}} = (a)_{\mathcal{N}}$, 从而 $N(a) = N(y)$. 因为 T 为 S 的滤子，故 $y \in N(y) \subseteq T$, 即 $(z)_{\mathcal{N}} \subseteq T$. 根据该事实,

$$I = I \cap (z)_{\mathcal{N}} \subseteq I \cap T = F \subseteq I,$$

故 $F = I$. □

推论 2.3.2 设 S 为序半群，I 为 S 的素理想. 那么 $I = \bigcup\{(x)_{\mathcal{N}} \mid x \in I\}$.

证明 设 $t \in (x)_{\mathcal{N}}, x \in I$, 因为 $(x)_{\mathcal{N}}$ 为 $(x)_{\mathcal{N}}$ 的理想，由定理 2.3.1, $(x)_{\mathcal{N}}$ 不含真的素理想. 因为

$$\begin{aligned}(x)_{\mathcal{N}}((x)_{\mathcal{N}} \cap I) &\subseteq (x)_{\mathcal{N}}^2 \cap (x)_{\mathcal{N}} I = (x)_{\mathcal{N}} \cap (x)_{\mathcal{N}} I \\ &\subseteq (x)_{\mathcal{N}} \cap I.\end{aligned}$$

同理可证 $((x)_{\mathcal{N}} \cap I)(x)_{\mathcal{N}} \subseteq (x)_{\mathcal{N}} \cap I$, 故 $(x)_{\mathcal{N}} \cap I$ 为 $(x)_{\mathcal{N}}$ 的理想. 设 $y, z \in (x)_{\mathcal{N}}, yz \in (x)_{\mathcal{N}} \cap I$, 因为 I 为 S 的素理想，有 $y \in I$ 或 $z \in I$, 故 $y \in (x)_{\mathcal{N}} \cap I$ 或 $z \in (x)_{\mathcal{N}} \cap I$. 至此证明得 $(x)_{\mathcal{N}} \cap I$ 为 $(x)_{\mathcal{N}}$ 的素理想，故 $I = (x)_{\mathcal{N}} \cap I$, 从而 $(x)_{\mathcal{N}} \subseteq I$. □

引理 2.3.3 设 S 为序半群，ρ 为 S 上的正则同余，则 ρ 的任一同余类 $(a)_\rho, a \in S$ 为凸子集.

证明 设 $c, b \in (a)_\rho$, 而且 $c \leq d \leq b, d \in S$. 因为 ρ 为正则同余，故在 S/ρ 上存在序关系 $\preceq$ 且 $(c)_\rho \preceq (d)_\rho \preceq (b)_\rho$, 故 $(c)_\rho = (d)_\rho = (b)_\rho = (a)_\rho$, 从而 $d \in (a)_\rho$. □

一个序半群的什么样的子集可以作为 S 的某个正则同余的同余类，这是一个很有趣的问题，到现在为止没有给出完美的结论. 下面我们仅仅讨论一些特殊的情况.

定理 2.3.4 设 S 是序半群，S 的半群结构上的理想 C 是某个正则同余的同余类的充分必要条件为 C 是凸集.

证明 由引理 2.3.3, 必要性是显然的. 反之，设 ρ_C 为 S 的关于 C 的 Rees 同余，显然 C 是 ρ_C 的同余类，要证明本结论，仅要证明 ρ_C 为 S 的正则同余即可. 我们在商半群 $S/\rho_C = \{\{x\} \mid x \in S \backslash C\} \cup \{C\}$ 上引入二元关系

$$\begin{aligned}\preceq := &\{(\{x\}, \{y\}) \mid (\exists c_1, c_2 \in C)\ x \leq c_1, c_2 \leq y\} \\ \cup &\{(\{x\}, \{y\}) \mid x \leq y\} \cup \{(\{x\}, C) \mid (\exists c \in C)\ x \leq c\} \\ \cup &\{(C, \{y\}) \mid (\exists c \in C)\ c \leq y\}.\end{aligned}$$

我们可以验证 $(S/\rho_C,\cdot,\preceq)$ 是序半群且 ρ_C 为正则的 (读者可作为练习或参见 [65,72]). □

推论 2.3.5 设 C 是序半群 S 的理想, 则 C 一定为 S 的某个正则同余的同余类.

定理 2.3.6 设 C 是序半群 S 的子集, 那么 C 为完全半格的同余类当且仅当 C 为 S 的半素理想与一个滤子的交.

证明 必要性 设 ρ 为 S 的完全半格同余, f 为 S 到 $Y=S/\rho$ 上的自然同态, 那么 $S=\bigcup\limits_{\alpha\in Y}S_\alpha$. 设 $C=S_\gamma,\gamma\in Y$, $A=\bigcup\limits_{\alpha\leq\gamma}S_\alpha$, $B=\bigcup\limits_{\alpha\geq\gamma}S_\alpha$, 则 $C=A\cap B$. 我们现在证明 A 为半素的, B 为一个滤子. 设 $a\in A$, 存在 $\beta\in Y$ 使得 $a\in S_\beta$. 因为

$$(\forall s\in S)\ \ f(sa)=f(s)f(a)\leq f(a)=\beta\leq\gamma.$$

故 $sa\in S_{f(sa)}\subseteq A$, 同理可证 $as\in A$. 又设 $b\leq a\in A,b\in S$, 则 $f(b)\leq f(a)=\beta$, 从而 $b\in S_{f(b)}\subseteq A$. 因为 $f(a^2)=f(a)$, 故当 $a^2\in A$, 则 $a\in A$.

设 $a\geq b\in B,a\in S$, 则存在 $\beta\in Y$ ($\beta\geq\gamma$) 使得 $b\in S_\beta$. 因为 $f(a)\geq f(b)$, 故 $a\in S_{f(a)}\subseteq B$. 设 $ab\in B$, 存在 $\alpha\in Y(\geq\gamma)$ 使得 $ab\in S_\alpha$. 因为

$$f(a),f(b)\geq f(a)f(b)=f(ab)=\alpha\geq\gamma,$$

故 $a\in S_{f(a)}\subseteq B,b\in S_{f(b)}\subseteq B$. 反之, 设 $a,b\in B$, 则 $f(a),f(b)\geq\gamma$, 从而 $ab\in S_{f(ab)}\subseteq B$.

充分性 设 $C=A\cap B$, A 为 S 的半素理想, B 为 S 的滤子. 我们现在定义 S 上的二元关系:

$$\sigma:=\{(a,b)\in S\times S\mid x\in S^1,xa\in C\Leftrightarrow xb\in C\}.$$

类似于 [2] 中定理 II.3.12 的证明, σ 为 S 的半格同余. 为了证明 σ 为完全的, 只要证: 如果 $a \leq b, \forall a, b \in S$, 则 $(ab, a) \in \sigma$. 事实上, 假如 $x \in S^1, xab \in C$, 则 $xab \in A$ 且 $xab \in B$. 因为 $xa^2 \leq xab$, 故 $xa^2 \in A \cap B = C$. 反之, 则 $xa^2 \in C, \forall x \in S^1$, 那么 $xa^2 \in A$ 且 $xa^2 \in B$. 因为 $xa^2 \leq xab$ 且 B 为 S 的滤子, 有 $xab \in B$. 另一方面, 由 $xa^2 \in A$ 可推出 $(axa)^2 = a(xa^2)xa \in A$, 从而 $(ax)^2 \in A$, 进一步推出 $ax \in A$. 因为 A 为半素理想, 由 $ax \in A$ 得 $(xa)^2 = x(ax)a \in A$, 推出 $xa \in A$, 从而 $xab \in A$. 由 σ 的定义可得 $(a, ab) \in \sigma$. □

推论 2.3.7 设 S 是半格, S 的子集 C 为 S 的某个完全半格同余的同余类当且仅当 C 为凸的.

证明 因为完全半格同余为正则同余, 由引理 2.3.3 得必要性的证明. 反之, 设 C 为凸子集, 且 $A = \bigcup_{a \in C} (a]$, $B = \bigcup_{b \in C} [b)$. 不难验证 A 为 S 的半素理想, B 为 S 的滤子, 且 $C \subseteq A \cap B$. 又设 $a \in A \cap B$, 则存在 $c, d \in C$ 使得 $d \leq a \leq c$. 因 C 是凸的, 故 $c \in C$. 即 $C = A \cap B$. 由定理 2.3.6 得 C 为 S 的某个完全半格同余的同余类.

§4 正则同余的刻画

为给出正则同余的一般刻画, 我们先给出一个定义.

定义 2.4.1 设 S 为序半群, ρ 为 S 的同余. S 中的元素列

$$(x, a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_n, y)$$

称为模 ρ 的拟链, 如果

$$x \leq a_1 \rho b_1 \leq a_2 \rho b_2 \leq \cdots \leq a_n \rho y,$$

n 称为该拟链的长度; x, y 分别称为拟链的首项与尾项. 一个模 ρ 的拟链称为闭的, 如果它的首项与尾项相同.

我们用 ${}_\rho C_{xy}$ 表示 S 的所有以 x 为首项， y 为尾项的模 ρ 的拟链的集.

引理 2.4.2 设 S 是序半群， ρ 为 S 上的同余，则

1) ${}_\rho C_{xy}$ 包含长度为 n 的拟链当且仅当 $(x,y)\in(\leq\circ\rho)^n$.

2) 假设 $(x,a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots,a_n,y)\in{}_\rho C_{xy}$, 则

$$(\forall c\in S)\qquad (cx,ca_1,cb_1,ca_2,cb_2,\cdots,ca_n,cy)\in{}_\rho C_{(cx)(cy)},$$
$$(xc,a_1c,b_1c,a_2c,b_2c,\cdots,a_nc,yc)\in{}_\rho C_{(xc)(yc)}.$$

3) 假设 x,y 包含在 S 中某个模 ρ 的闭链中，那么存在 $m\in\mathbf{N}$ 使得 $(x,y)\in(\leq\circ\rho)^m$.

证明 1),2) 是很容易的，我们仅仅证明 3). 设

$$(a_\circ,a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots,a_n,a_\circ)$$

是一个模 ρ 的闭链且包含 x,y. 我们可以考虑以下四种情形:

A) $x=a_i,y=a_j$;

B) $x=a_i,y=b_j$;

C) $x=b_i,y=a_j$;

D) $x=b_i,y=b_j$.

我们仅证 A), 用同样的方法可证 B), C) 和 D).

设 $i\leq j$, 则 $x=a_i\leq a_i\rho b_i\leq\cdots\leq a_j\rho a_j(=y)$, $(x,y)\in(\leq\circ\rho)^{j-i}$. 如果 $i\geq j$, $x=a_i\leq a_i\rho b_i\leq\cdots\leq a_n\rho a_\circ\leq a_1\rho b_1\leq\cdots\leq a_j\rho a_j(=y)$. 我们有 $(x,y)\in(\leq\circ\rho)^{n-i+j}$. □

引理 2.4.3 设 S 为序半群, ρ 为 S 的同余. 如果 $(x,y)\in\rho$, $(z,k)\in\rho$, 那么 ${}_\rho C_{xk}\neq\emptyset$ 当且仅当 ${}_\rho C_{yz}\neq\emptyset$.

证明 必要性 如果 ${}_\rho C_{xk}\neq\emptyset$, 由引理 2.4.2, 存在 $n\in\mathbf{N}$ 使得 $(x,k)\in(\leq\circ\rho)^n$. 因为 $(x,y)\in\rho$, $(z,k)\in\rho$, 我们有

$$y\leq y\rho x(\leq\circ\rho)^n k\leq k\rho z,$$

即 $(y,z)\in(\leq\circ\rho)^{n+2}$. 由引理 2.4.2, ${}_\rho C_{yz}\neq\emptyset$.

充分性的证明与必要性类似, 证略. □

定理 2.4.4 序半群 S 的一个同余 ρ 为正则同余当且仅当 $\forall x\in S$, ${}_\rho C_{xx}$ 包含在 ρ 的一个同余类中.

证明 必要性 设 ρ 为 S 的正则同余, 则存在 S/ρ 上的序关系 $\preceq$ 使得 $(S/\rho,\cdot,\preceq)$ 为序半群且 $\varphi: S\mapsto S/\rho$ 是同态. 设 $(x,a_1,b_1,...,a_n,x)$ 为 ${}_\rho C_{xx}$ 中的一个闭链, 则

$$x\leq a_1\rho b_1\leq a_2\rho b_2\leq\cdots\leq a_n\rho x.$$

那么

$$\varphi(x)\preceq\varphi(a_1)\rho\varphi(b_1)\preceq\varphi(a_2)\rho\varphi(b_2)\preceq\cdots\preceq\varphi(a_n)\rho\varphi(x).$$

由此推出 $\varphi(x)=\varphi(a_1)=\varphi(b_1)=...=\varphi(a_n)$. 故

$$(x,a_1,b_1,\cdots,a_n,x)$$

包含在 S 的同一个 ρ 类中.

充分性 我们首先定义商半群 S/ρ 上的二元关系 $\preceq$:

$$\preceq:=\{((x)_\rho,(y)_\rho)\mid {}_\rho C_{xy}\neq\emptyset\}.$$

1) $\preceq$ 是可定义的. 设 $x_1,y_1\in S$, 且 $(x)_\rho=(x_1)_\rho$, $(y)_\rho=(y_1)_\rho$. 由引理 2.4.3, ${}_\rho C_{xy}\neq\emptyset$, 当且仅当 ${}_\rho C_{x_1y_1}\neq\emptyset$.

2) $\preceq$ 为 S/ρ 上的序关系.

A) $\forall x\in S$, 因为 $x\leq x\rho x$, 故 ${}_\rho C_{xx}\neq\emptyset$, 从而 $\preceq$ 是自反的.

B) $\preceq$ 是传递的. 设 $((x)_\rho,(y)_\rho)\in\preceq$, $((y)_\rho,(z)_\rho)\in\preceq$. 那么 ${}_\rho C_{xy}\neq\emptyset$, ${}_\rho C_{yz}\neq\emptyset$. 由引理 3.2, 存在 $m,n\in N$ 使得 $(x,y)\in(\leq\circ\rho)^m$, $(y,z)\in(\leq\circ\rho)^n$. 则

$$(x,z)\in(\leq\circ\rho)^m\circ(\leq\circ\rho)^n=(\leq\circ\rho)^{m+n},$$

即 ${}_\rho C_{xz} \neq \emptyset$.

C) $\preceq$ 是反对称的. 设 $((x)_\rho,(y)_\rho) \in\preceq$, $((y)_\rho,(x)_\rho) \in\preceq$, 那么 ${}_\rho C_{xy} \neq \emptyset$, ${}_\rho C_{yx} \neq \emptyset$. 由 B), ${}_\rho C_{xx} \neq \emptyset$, 即存在 S 的模 ρ 闭链包含 x,y. 由假设知, $(x)_\rho = (y)_\rho$.

3) $(S/\rho,\cdot,\preceq)$ 是序半群. 仅需验证 $\preceq$ 关于 S/ρ 的运算是相容的. 设 $((x)_\rho,(y)_\rho) \in \preceq$, 则 ${}_\rho C_{xy} \neq \emptyset$. 由引理 2.4.2, $\forall c \in S$, ${}_\rho C_{(cx)(cy)} \neq \emptyset$, ${}_\rho C_{(xc)(yc)} \neq \emptyset$, 即

$$((cx)_\rho,(cy)_\rho) \in\preceq, \quad ((xc)_\rho,(yc)_\rho) \in\preceq .$$

4) $\varphi : S \mapsto S/\rho \mid x \to (x)_\rho$. 验证 φ 为同态, 我们仅需验证

$$x \leq y \Longleftarrow (x)_\rho \preceq (y)_\rho.$$

事实上, 如果 $x \leq y$, 则 $(x,y) \in\leq \circ\rho$, ${}_\rho C_{xy} \neq \emptyset$, 故 $(x)_\rho \preceq (y)_\rho$.

□

定理 2.4.5 设 S 为序半群, ρ 为 S 上的同余. ρ 是强正则的当且仅当 ρ 满足:

1) 每个 ρ 类是凸的;

2) $\rho\circ \leq \subseteq \leq \circ\rho$.

证明 必要性由引理 2.3.3, 显然.

充分性 仅要证明 ρ 为正则的. 由定理 2.4.4, 仅需证 $\forall x \in S$, S 的每个模 ρ 的闭链 ${}_\rho C_{xx}$ 包含在一个 ρ 类中. 我们对 S 的模 ρ 的闭链的长度应用归纳法.

A) 设 $n=1$. 则该链可以表示为

$$x \leq a_1 \rho x, \quad \forall a_1 \in S.$$

因为 $\rho\circ \leq \subseteq \leq \circ\rho$, 且 $(a_1,x) \in \rho\subseteq\rho\circ \leq \subseteq \leq \circ\rho$, 存在 $b_1 \in S$ 使得 $a_1 \leq b_1 \rho x$. 因为 $(x)_\rho = (b_1)_\rho$, 且 $(x)_\rho$ 为凸子集, 故

$(b_1)_\rho = (a_1)_\rho = (x)_\rho$.

B) 假设 $n = k-1$ 时结论成立. 对 $n = k$ 的情形, 设 $(x, a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_k, x)$ 为 S 的模 ρ 的长度为 k 的闭链. 那么

$$x \leq a_1\rho b_1 \leq a_2\rho b_2 \leq \cdots \leq a_{k-2}\rho b_{k-2} \leq a_{k-1}\rho b_{k-1} \leq a_k\rho x.$$

因为 $(a_{k-1}, a_k) \in \rho\circ \leq \subseteq \leq \circ\rho$, 那么存在 $c \in S$ 使得 $a_{k-1} \leq c\rho a_k$. 因此

$$x \leq a_1\rho b_1 \leq a_2\rho b_2 \leq \cdots \leq a_{k-2}\rho b_{k-2} \leq c\rho x.$$

这时 $(x, a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, b_{k-2}, c, x)$ 为 S 上的长度为 $k-1$ 的闭链. 由归纳假设, 有

$$(x)_\rho = (a_1)_\rho = (b_1)_\rho = \cdots = (b_{k-2})_\rho = (c)_\rho.$$

又 $b_{k-2} \leq a_{k-1} \leq c$, 由假设

$$(b_{k-2})_\rho = (a_{k-1})_\rho = (b_{k-1})_\rho = (c)_\rho = (a_k)_\rho.$$

因此 $(x, a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_k, x)$ 包含在一个 ρ 类中. □

注 2.4.6 设 ρ 为序半群 S 的正则同余, 那么由定理 2.4.4, 我们可以定义商半群 S/ρ 上的序关系

$$\preceq := \{((x)_\rho, (y)_\rho) \mid {}_\rho C_{xy} \neq \emptyset\},$$

使得 $(S/\rho, \cdot, \preceq)$ 是序半群. 假如 ρ 为 S 的强正则同余, 那么下列各款是等价的:

α) ${}_\rho C_{xy} \neq \emptyset$;

β) $(\forall z \in (x)_\rho)(\exists y_1 \in (y)_\rho) z \leq y_1$;

γ) $(\exists z \in (x)_\rho)(\exists y_1 \in (y)_\rho) z \leq y_1$.

证明留给读者作为练习.

§5 正则同余格

设 S 为序半群. $C(S)$ 表示 S 的所有同余集, 则 $C(S)$ 关于普通集合的交和同余积运算

$$(a,b)\in\prod_{\alpha\in\Gamma}\rho_\alpha \quad\Leftrightarrow\quad (\exists c_o=a,c_1,...,c_n=b\in S)$$

$$(\exists\rho_{\alpha_j}\in\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma})\ \ (c_j,c_{j+1})\in\rho_{\alpha_j}$$

是一个完备格, 最小元为 ι, 最大元为 π. 以 $RC(S),SRC(S)$ 分别表示 S 的正则同余与强正则同余集, 则

定理 2.5.1 设 S 为序半群, 则 $RC(S)$ 为完备格.

证明 首先不难看出 $\pi\in RC(S)$. 要证 $RC(S)$ 是完备格, 仅要证 $RC(S)$ 是交完备的交半格. 设 $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 是 S 的正则同余簇. 则 $\bigcap_{\alpha\in\Gamma}\rho_\alpha$ 也为 S 的正则同余. 事实上, 设

$$(x,a_1,b_1,a_2,b_2,\cdot,a_n,x)$$

是模 $\bigcap_{\alpha\in\Gamma}\rho_\alpha$ 的闭拟链, 即

$$x\leq a_1(\bigcap_{\alpha\in\Gamma}\rho_\alpha)b_1\leq\cdots\leq a_n(\bigcap_{\alpha\in\Gamma}\rho_\alpha)x.$$

故

$$(\forall\alpha\in\Gamma)\ x\leq a_1\rho_\alpha b_1\leq\cdots\leq a_n\rho_\alpha x.$$

这说明 $(x,a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots,a_n,x)$ 为模 ρ_α $(\forall\alpha\in\Gamma)$ 的闭链. 由定理 2.4.4,

$$(x,a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots,a_n,x)$$

包含在一个 ρ_α 类之中, $\forall\alpha\in\Gamma$. 由 α 的任意性, 得该拟链包含在 $\bigcap_{\alpha\in\Gamma}\rho_\alpha$ 类中. □

在证明该结论之后，我们自然要问如何去描述 $RC(S)$ 中的并运算. 设 $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 为 $RC(S)$ 中的元素簇，它们在 $RC(S)$ 中的并称为簇 $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 的正则闭包. 如果 ρ 为 S 的同余，以 ρ^c 表示 ρ 的正则闭包，可证 $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 的正则闭包和 $\prod\limits_{\alpha\in\Gamma}\rho_\alpha$ 的正则闭包一致，即 $\bigvee\limits_{\alpha\in\Gamma}\rho_\alpha=(\prod\limits_{\alpha\in\Gamma}\rho_\alpha)^c$.

定理 2.5.2 设 S 为序半群. S 的一个同余 ρ 的正则闭包

$$\rho^c:=\{(x,y)\in S\times S\mid(\exists z\in S)x,y\in{}_\rho C_{zz}\}.$$

证明 1) 设 $\rho^*:=\{(x,y)\in S\times S\mid(\exists z\in S)x,y\in{}_\rho C_{zz}\}$. 我们下面证明 ρ^* 为包含 ρ 的正则同余. 设 $(x,y)\in\rho$, 则 $x\leq x\rho y\leq y\rho x$, 因此 $x,y\in{}_\rho C_{xx}$, 故 $\rho\subseteq\rho^*$.

α) 因为 $x\leq x\rho x$, 故 $(x,x)\in\rho^*$.

β) 假设 $(x,y)\in\rho^*$, $(y,z)\in\rho^*$. 则存在模 ρ 的二个闭链

$$(a_\circ,a_1,b_1,\cdots,a_n,a_\circ),\quad(c_\circ,c_1,d_1,\cdots,c_m,c_\circ)$$

使得下面情形之一成立:

A) $y=a_i=c_j$, $\exists i\in\{1,2,\cdots,n\},\exists j\in\{0,1,2,\cdots,m\}$;

B) $y=a_i=d_j$, $\exists i\in\{0,1,2,\cdots,n\},\exists j\in\{1,2,\cdots,m-1\}$;

C) $y=b_i=c_j$, $\exists i\in\{1,2,\cdots,n-1\},\exists j\in\{0,1,2,\cdots,m\}$;

D) $y=b_i=d_j$, $\exists i\in\{1,2,\cdots,n-1\},\exists j\in\{0,1,2,\cdots,m-1\}$.

设 A) 成立，则

$$\begin{aligned}(\quad&a_i,a_i,a_{i+1},b_{i+1},\cdots,b_n,a_\circ,a_1,b_1,\cdots,b_{i-1},a_i(=c_j),\\&d_j,\cdots,c_m,d_m,c_\circ,c_1,d_1,\cdots,c_j(=a_i))\end{aligned}$$

是模 ρ 的包含 x,z 的闭拟链. 类似可证 B), C), D) 的情形.

γ) 由引理 2.4.4, ρ^* 关于 S 的运算是相容的.

δ) 因为设 $(x,y)\in\rho^*$, 则 $(\exists z\in S)\ x,y\in {}_\rho C_{zz}$, 类似于定理 2.4.4 充分性的证明, 我们可以在 S/ρ^* 上定义序关系

$$\preceq := \{((x)_{\rho^*},(y)_{\rho^*})\mid {}_{\rho^*}C_{xy}\neq\emptyset\},$$

使得 $(S/\rho^*,\cdot,\preceq)$ 是序半群, 且 $\varphi: S\mapsto S/\rho^*$ 为同态.

2) ρ^* 是 S 的包含 ρ 的最小的正则同余. 事实上, 假设 ρ 为 S 的正则同余, 则 $\rho=\rho^*$. 如果 ρ 不是正则同余, 且有 S 的正则同余 τ, $\rho\subseteq\tau$. 设 $(x,y)\in\rho^*$, 则存在模 ρ 闭拟链包含 x,y, 该闭拟链显然也是模 τ 的闭拟链. 由定理 2.4.4, $(x,y)\in\tau$. □

推论 2.5.3 设 $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 是序半群 S 的正则同余簇. 那么完备格 $RC(S)$ 中的并 $\bigvee\limits_{\alpha\in\Gamma}\rho_\alpha$ 为

$$(x,y)\in\bigvee_{\alpha\in\Gamma}\rho_\alpha \Leftrightarrow \text{存在模}\prod_{\alpha\in\Gamma}\rho_\alpha\text{的包含 } x,y \text{ 的闭拟链}.$$

证明留作练习.

定理 2.5.4 设 S 为序半群, 则 $SRC(S)$ 是完备格.

证明 因为 ι 是 $SRC(S)$ 中的最小元, 要证该结论, 仅需证明 $SRC(S)$ 是并完备的并半格. 设 $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 为 S 的强正则同余簇, 则 $(\prod\limits_{\alpha\in\Gamma}\rho_\alpha)^c$ 为包含 ρ_α, $\forall\alpha\in\Gamma$ 的最小的强正则同余.

1) $(\prod\limits_{\alpha\in\Gamma}\rho_\alpha)^c$ 为 S 的强正则同余. 事实上, 由推论 2.5.3, $(\prod\limits_{\alpha\in\Gamma}\rho_\alpha)^c$ 为正则的. 设 $(x,y)\in(\prod\limits_{\alpha\in\Gamma}\rho_\alpha)^c\circ\leq$. 则存在 $z\in S$ 使得

$$x(\prod_{\alpha\in\Gamma}\rho_\alpha)^c z\leq y,$$

由定理 2.5.2, 存在一个模 $\prod\limits_{\alpha\in\Gamma}\rho_\alpha$ 的闭拟链

$$(a_\circ,a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots,a_n,a_\circ)$$

包含 x, z. 即存在 $n \in N$ 使得 $(x,z) \in (\leq \circ \prod_{\alpha\in\Gamma} \rho_\alpha)^n$. 因此，有 $(x,y) \in ((\leq \circ \prod_{\alpha\in\Gamma} \rho_\alpha)^n \circ \leq)$, 即

$$
\begin{aligned}
(x,y) \in (\leq \circ \prod_{\alpha\in\Gamma} \rho_\alpha)^n \circ \leq \ &\subseteq \ (\leq \circ \prod_{\alpha\in\Gamma} \rho_\alpha) \circ \leq \\
&\subseteq \ \leq^2 \circ (\prod_{\alpha\in\Gamma} \rho_\alpha) \subseteq \leq \circ (\prod_{\alpha\in\Gamma} \rho_\alpha)^c.
\end{aligned}
$$

故 $(\prod_{\alpha\in\Gamma} \rho_\alpha)^c \circ \leq \subseteq \leq \circ (\prod_{\alpha\in\Gamma} \rho_\alpha)^c$.

2) 设 τ 为 S 的强正则同余且包含 $\rho_\alpha, \forall \alpha \in \Gamma$, 那么 $(\prod_{\alpha\in\Gamma} \rho_\alpha) \subseteq \tau$, 从而 $(\prod_{\alpha\in\Gamma} \rho_\alpha)^c \subseteq \tau$. □

这里我们已经引入了三个完备格 $C(S), RC(S), SRC(S)$, 且

$$SRC(S) \subseteq RC(S) \subseteq C(S).$$

一般情况下，$SRC(S)$ 不是 $RC(S)$ 的子格，$RC(S)$ 不是 $C(S)$ 的子格. 读者可举例验证或参见 [82].

下面我们主要讨论格序半群 (l 半群) 的格序同余 (l 同余) 格及其完全分配性.

设 S 为 l 半群，S 的一个同余 ρ 称为 S 的 l 同余，如果 ρ 保持格运算，即

$$(\forall a,b,c \in S)\ (a,b) \in \rho \Longrightarrow (a \vee c, b \vee c) \in \rho, (a \wedge c, b \wedge c) \in \rho.$$

$LC(S)$ 表示 l 半群的 S 的所有 l 同余，则 $LC(S)$ 是 $C(S)$ 的子格.

命题 2.5.5 设 S 为 l 半群，ρ 为 l 同余. 则 S/ρ 是 l 半群.

证明 我们定义 S/ρ 上的二元关系

$$\leq_\rho := \{((a)_\rho, (b)_\rho) \mid (a)_\rho = (a \wedge b)_\rho\},$$

则 $\leq_\rho$ 为 S/ρ 上的偏序关系且 $(S/\rho, \leq_\rho)$ 是一个格，因为我们可以定义 $(S/\rho, \leq_\rho)$ 的“$\vee$”和“$\wedge$”运算如下：

$$(\forall x, y \in S) \quad (x)_\rho \vee (y)_\rho = (x \vee y)_\rho, \quad (x)_\rho \wedge (y)_\rho = (x \wedge y)_\rho.$$

证明的其他部分是简单的验证，略. □

命题 2.5.6 设 S 为 l 半群，ρ 为 S 的 l 同余. 则下列各款成立：

1) ρ 为 S 的强正则同余；

2) $\preceq := \{((x)_\rho, (y)_\rho) \mid {}_\rho C_{xy} \neq \emptyset\} = \{((x)_\rho, (y)_\rho) \mid (x \wedge y)_\rho = (x)_\rho\}$.

证明 1) 由命题 2.5.5, 不难看出 ρ 为 S 的正则同余. 设 $(a,b) \in \rho\circ \leq$, 则存在 $c \in S$ 使得 $a\rho c \leq b$. 令 $c_1 = a \vee b$, 则 $a \leq (a \vee b)\rho(c \vee b)(= b)$. 因此 $(a,b) \in \leq \circ\rho$, 故 $\rho\circ \leq \subseteq \leq \circ\rho$.

2) 因为 ρ 为强正则同余，设 ${}_\rho C_{xy} \neq \emptyset$, 则存在 $n \in N$ 使得 $(x,y) \in (\leq \circ\rho)^n$. 故

$$(x,y) \in (\leq \circ\rho)^n \subseteq \leq^n \circ\rho^n \subseteq \leq \circ\rho.$$

则存在 $y_1 \in S$ 使得 $x \leq y_1 \rho y$, 即

$$(x \wedge y)_\rho = (x \wedge y_1)_\rho = (x)_\rho.$$

反之，设 $(x \wedge y)_\rho = (x)_\rho$, 则 $x\rho(x \wedge y) \leq y$, 因此，$(x,y) \in \rho\circ \leq \subseteq \leq \circ\rho$. 故 ${}_\rho C_{xy} \neq \phi$. □

为了讨论 l 同余格的完全分配性，我们引入下列定义.

定义 2.5.7 l 半群 S 的 l 同余 ρ 称为极值同余，如果存在 $(x,y)\in S\times S$ $(x\neq y)$ 使得 ρ 是关于不包含 (x,y) 的极大的 l 同余. 为了方便起见，这时 ρ 也称为关于 (x,y) 的极值同余.

我们用 $\mathrm{val}(x,y)$ 表示 S 的关于 (x,y) 的所有极值同余. 一个极值 l 同余 ρ 称为特殊的，如果存在 $(a,b)\in S\times S$ $(a\neq b)$，使得 $|\mathrm{val}(a,b)|=1$. 如果 S 的每个极值 l 同余均为特殊的， S 也称为特殊的. 不难看出， S 的最大同余 π 不是极值同余.

定理 2.5.8 l 半群的 l 同余 ρ 是极值同余当且仅当 ρ 在格 $LC(S)$ 中存在覆盖 ρ^*.

证明 必要性　令 $\mathcal{A}:=\{\rho_\alpha\mid\rho\subset\rho_\alpha\}$. 则 $\mathcal{A}\neq\phi$，因为 $\pi\in\mathcal{A}$. 记 $\rho^*=\bigcap\rho_\alpha$，则 ρ^* 为 ρ 的覆盖. 事实上，因为 ρ 为极值同余，则存在 $x,y\in S$ $(x\neq y)$ 使得 $\rho\in\mathrm{val}(x,y)$. 又 $\rho\subset\rho_\alpha$，故 $(x,y)\in\rho_\alpha$，从而 $(x,y)\in\rho^*\neq\rho$.

充分性　设 ρ^* 为 ρ 的覆盖，则取 $(x,y)\in\rho^*\backslash\rho$，有 $\rho\in\mathrm{val}(x,y)$. □

以下我们用 $MLC(S)$ 表示 l 半群 S 的所有极值同余集. 由 Zorn 引理，我们得出

命题 2.5.9 设 S 为 l 半群，则下列各款成立:

1) 设 $(x,y)\in S\times S$ $(x\neq y)$, $\mathrm{val}(x,y)\neq\emptyset$;

2) 设 ρ 为 S 的 l 同余且 $\rho\neq\pi$，则 ρ 一定包含在 S 的某个极值同余中;

3) S 的每个 l 同余是 S 的极值同余之交.

证明留作练习.

定理 2.5.10 l 同余 ρ 是极值同余当且仅当 ρ 在格 $LC(S)$ 中交不可约.

证明 必要性　设 $\rho\in\mathrm{val}(x,y)$ 且 $\rho=\bigcap\limits_{i\in I}\rho_i$，则必有 $i\in I$

使得 $\rho=\rho_i$. 否则 $\rho\subset\rho_i \quad \forall i\in I$, 则 $(x,y)\in\rho_i \quad \forall i\in I$, 从而 $(x,y)\in\bigcap\limits_{i\in I}\rho_i=\rho$, 矛盾.

充分性　设 ρ 是交不可约的，令

$$\rho^*=\bigcap_{i\in I}\{\rho_i \mid \rho\subset\rho_i\},$$

则 $\rho\subset\rho^*$, 由定理 2.5.8 得 ρ 为极值同余. □

由定理 2.5.8, 命题 2.5.9 我们不难看出 l 半群的任一 l 同余为 S 的交不可约 l 同余之交. 而且 $LC(S)$ 中所有交不可约的 l 同余恰为集 $MLC(S)$. 为了给出 $LC(S)$ 完全分配性的刻画，我们需要以下准备.

引理 2.5.11　设 $LC(S)$ 为 l 半群 S 的 l 同余格. 则下列各款等价:

1) $LC(S)$ 由 $MLC(S)$ 自由生成;

2) $LC(S)$ 是分配格;

3) $\rho\vee(\wedge\rho_\alpha)=\wedge(\rho\vee\rho_\alpha), \forall\rho,\rho_\alpha\in MLC(S)$.

该引理的证明类似于文献中 P. Conrad 工作中相关定理的证明，这里略去. □

引理 2.5.12　设 $\rho\in MLC(S)$, ρ 是特殊的当且仅当对 S 的 l 同余簇 $\{\rho_i\}_{i\in I}$, 如果 $\bigcap\limits_{i\in I}\rho_i\subseteq\rho$, 则存在 $i\in I$ 使得 $\rho_i\subseteq\rho$.

证明　必要性　设 $\rho\in\mathrm{val}(x,y)$ 且对 $\{\rho_i\}_{i\in I}\subseteq LC(S)$, 如果 $\bigcap\limits_{i\in I}\rho_i\subseteq\rho$, 那么一定存在 $i\in I$ 使得 $(x,y)\notin\rho_i$, 由 Zorn 引理，存在 $\rho_1\in\mathrm{val}(x,y)$ 使得 $\rho_i\subseteq\rho_1$, 因为 $\mathrm{val}(x,y)=\{\rho\}$, 故 $\rho=\rho_1\supseteq\rho_i$.

充分性　设 $\mathcal{F}=\{\rho_\alpha\in LC(S) \mid \rho_\alpha\not\subseteq\rho\}$, 由假设 $\bigcap\rho_\alpha\not\subseteq\rho$, 取 $(x,y)\in\bigcap\rho_\alpha\backslash\rho$, 则 $\rho\in\mathrm{val}(x,y)$, 否则存在 $\rho^*\in\mathrm{val}(x,y)$

使得 $\rho \subset \rho^*$. 由 $\mathcal{F}$ 的定义 $\rho^* \in \mathcal{F}$, 故 $(x,y) \in \rho^*$, 矛盾. 假设 $\tau \in \mathrm{val}(x,y)$, 则 $\tau \notin \mathcal{F}$, 从而 $\tau \subseteq \rho$, 结果 $\tau = \rho$, 故 ρ 为特殊的. □

推论 2.5.13 设 S 为特殊的 l 半群, 则格 $LC(S)$ 由 $RLC(S)$ 自由生成.

证明 设 $\{\rho_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$, $\{\rho_\beta\}_{\beta\in\Lambda}$ 为 $MLC(S)$ 的对偶理想且 $\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} \rho_\gamma = \bigcap\limits_{\beta\in\Lambda} \rho_\beta$, 假设 $\bigcap\limits_{\beta\in\Lambda} \rho_\beta \subseteq \rho_\gamma$, $\forall\gamma \in \Gamma$, 由引理 2.5.12, 存在 $\beta \in \Lambda$ 使得 $\rho_\beta \subseteq \rho_\gamma$, 从而 $\rho_\gamma \in \{\rho_\beta\}_{\beta\in\Lambda}$, 故 $\{\rho_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subseteq \{\rho_\beta\}_{\beta\in\lambda}$, 同理可证 $\{\rho_\beta\}_{\beta\in\Lambda} \subseteq \{\rho_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$. □

有了以上准备之后, 我们有

定理 2.5.14 格 $LC(S)$ 是完全分配的当且仅当 S 是特殊的.

证明由引理 2.5.11, 推论 2.5.13 可得出.

第三章　序半群的分解

§1　完全半格分解

一个序半群 S 称为型 A 半群的半格 (完全半格，带) 如果存在 S 的半格同余 (完全半格同余) 使得 S 的关于该同余的每个同余类是型 A 半群. 我们已知 $\mathcal{N}$ 为 S 的最小的完全半格同余，因此 S 可以有完备半格分解. 本节我们通过 S 上的一些二元关系讨论一个序半群是完全半格的性质，主要通过半素理想给出 $\mathcal{N}$ 的另一种刻画. 本节主要结果来自 [23—25].

为了方便，我们首先引入 S 上的一些二元关系及讨论它们的相关性质，这些关系不是本节都要用到，主要为本章以后内容做一些准备.

定义 3.1.1　设 S 为序半群，定义 S 上的二元关系如下：

1) $a\tau b \Longleftrightarrow (\exists x, y \in S^1)\ b \leq xay$,

$a\tau_r b \Longleftrightarrow (\exists y \in S^1)\ b \leq ay$,

$a\tau_l b \Longleftrightarrow (\exists x \in S^1)\ b \leq xa$,

$\tau_t = \tau_r \cap \tau_l$;

2) $a\sigma b \Longleftrightarrow (\exists x, y \in S^1)\ b^2 \leq xay$;

3) $a\eta b \Longleftrightarrow (\exists m \in \mathbf{Z}^+)\ (\exists x, y \in S^1)\ b^m \leq xay$,

$a\eta_r b \Longleftrightarrow (\exists m \in \mathbf{Z}^+)\ (\exists y \in S^1)\ b^m \leq ay$,

$a\eta_l b \Longleftrightarrow (\exists m \in \mathbf{Z}^+)\ (\exists x \in S^1)\ b^m \leq xa$,

$\eta_t = \eta_r \cap \eta_l$;

4) $\rho = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \sigma^n$, $\mu = \eta \cap \eta^{-1}$, $\mu_k = \eta_k \cap \eta_k^{-1}, k = r, l, t$;

5) $\xi = \rho \cap \rho^{-1}$.

引理 3.1.2　设 S 为序半群，则下列各款成立：

1) $I_S \subseteq \tau \subseteq \sigma \subseteq \eta \subseteq \rho$;

2) $I_S \subseteq \mu \subseteq \xi$.

证明 显然 $I_S \subseteq \tau \subseteq \sigma \subseteq \eta$. 设 $(a,b) \in \eta$, 则存在 $m \in \mathbf{Z}^+$, 使得 $b^m \leq xay$, $x,y \in S^1$. 如果 $m=1$, 则 $(a,b) \in \tau \subseteq \rho$. 如果 $m \geq 2$, 则存在 $k \in \mathbf{Z}^+$, 使 $2^k \leq m < 2^{k+1}$, 因为

$$(b^{2^k})^2 = b^{2^{k+1}} = b^{(2^{k+1}-m)}b^m \leq (b^{(2^{k+1}-m)}x)ay,$$

我们有 $(a, b^{2^k}) \in \sigma$, 又 $(b^{2^{i-1}})^2 = b^{2^i} \leq 1 \cdot b^{2^i} \cdot 1$, 故 $(b^{2^i}, b^{2^{i-1}}) \in \sigma$ $(1 \leq i \leq k)$, 从而 $(b^{2^k}, b) \in \sigma^{k-1}$, 故

$$(a,b) \in \sigma^{k-1} \cdot \sigma = \sigma^k \subseteq \rho.$$

2) 由 1) 可立即推出.

从以上一组关系的定义不难看出 τ 是可传递的且

$$(\forall a,b \in S) \ \ (ab,ba) \in \sigma \subseteq \eta, \ \ (a,a^2) \in \sigma \subseteq \eta.$$

由 ρ 的定义和引理 3.1.2 , 可得 ρ 是传递的且

$$\rho = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma^n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \eta^n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \rho^n = \rho,$$

即 $\rho = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \eta^n$. □

引理 3.1.3 设 S 为序半群, 则下列各款成立:

1) $(\forall a,b \in S^1)$ $(\forall m \in Z^+, m \geq 2)$ $(a^m b^m, ab) \in \sigma^{4(m-1)}$;

2) $(\forall a,b,c \in S)$ $(ca,cb),(ac,ba) \in \sigma^9$.

证明 1) 当 $m=2$, 因为 $(a(ab^2),(ab^2)a) \in \sigma$, 又

$$(ab^2)^2 = ab^2ab^2 \leq 1 \cdot (ab^2a) \cdot b^2,$$

从而 $(ab^2a, ab^2) \in \sigma$, 故 $(a^2b^2, ab^2) \in \sigma^2$; 类似地有 $(ab^2, ab) \in \sigma^2$, 故 $(a^2b^2, ab) \in \sigma^4$. 设 $m > 2$ 且 $m = k \geq 2$ 时有 $(a^kb^k, ab) \in \sigma^{4(k-1)}$. 对 $m = k+1$, 类似地,

$$(a^{k+1}b^{k+1}, a^kb^{k+1}) \in \sigma^2, \quad (a^kb^{k+1}, a^kb^k) \in \sigma^2,$$

从而 $(a^{k+1}b^{k+1}, a^kb^k) \in \sigma^4$. 由假设

$$(a^{k+1}b^{k+1}, ab) \in \sigma^4 \cdot \sigma^{4(k-1)} = \sigma^{4k} = \sigma^{4(m-1)}.$$

由归纳假设, 结论成立.

2) 设 $(a, b) \in \sigma, c \in S$, 则 $b^2 \leq xay$, $x, y \in S^1$. 因此

$$(b^2c^2)^2 = b^2c^2b^2c^2 \leq (b^2c^2)[(xay)c^2] \cdot 1,$$

即 $(xayc^2, b^2c^2) \in \sigma$. 由 1) 及 σ 的定义, 我们有

$$(ca, cay) \in \sigma, (cay, ayc) \in \sigma, (ayc, x(ayc)c) \in \sigma,$$

故 $(ca, bc) \in \sigma^8$. 又 $(bc, cb) \in \sigma$, 因此 $(ca, cb) \in \sigma^9$. 同理可得 $(ac, bc) \in \sigma^9$. □

定理 3.1.4 ξ 为 S 的半格同余且当 S 上的序关系为平凡序 1_S, 则 ξ 为 S 的最小半格同余.

证明 因为 $\xi = (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \sigma^n)^{-1} \bigcap (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \sigma^n)$, 所以 ξ 为 S 上的等价关系, 由引理 3.1.3 及前面的说明, ξ 是 S 的半格同余. 设 θ 为 S 的任一半格同余, $(a, b) \in \xi$, 则 $(a, b) \in \rho$ 且 $(b, a) \in \rho$. 设 $(a, b) \in \rho$, 则存在 $n \in \mathbf{Z}^+$ 使得 $(a, b) \in \sigma^n$, 因此存在 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1} \in S$ 使得

$$(a, a_1), (a_1, a_2), \cdots, (a_{n-1}, b) \in \sigma.$$

由于 $\leq_S = 1_S$, 则 $a_{i+1}^2 = x_ia_iy_i$, $x_i, y_i \in S^1$, 从而 $a_{i+1}\theta = (x_{i+1}\theta)(a_i\theta)(y_i\theta)$, 故 $a_{i+1}\theta \preceq a_i\theta$, $i = 0, 1, 2, \cdots, n$, 其中 $a_0 =$

$a, a_n = b$. 故 $a\theta \preceq b\theta$. 由 $(b,a) \in \rho$, 类似可得出 $b\theta \preceq a\theta$. 从而 $(a,b) \in \theta$.

引理 3.1.5 设序半群 S 是序子半群 $S_\alpha(\alpha \in Y)$ 的完全半格 Y, 即 $S = \bigcup_{\alpha\in Y} S_\alpha$, 则下列各款成立:

1) 设 $a \in S_\alpha, b \in S_\beta, \alpha, \beta \in Y$ 且 $(a,b) \in \eta$, 则 $\beta \leq \alpha$;

2) 设 $(a,b) \in \eta^n, a, b \in S_\alpha$, 则 $(a,b) \in \eta^n|_{S_\alpha}$.

证明 1) 因 $(a,b) \in \eta$, 则存在 $n \in Z^+$ 及 $x \in S_\gamma$, $y \in S_\delta$ 使得 $b^n \leq xay$, 由 S 有完全半格分解形式, 故 $\beta^n \leq \gamma\alpha\delta$, 从而 $\beta \leq \alpha$.

2) 设 $(a,b) \in \eta^n$, 则存在 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 使得

$$a\eta x_1 \eta x_2 \cdot \eta x_{n-1} \eta b, \quad x_i \in S_{\beta_i}, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1.$$

从 $(x_{i-1}, x_i) \in \eta$, 存在 $n_i \in Z^+$, $x \in S_\gamma$, $y \in S_\delta$, 使得

$$x_i^{n_i} \leq x x_{i-1} y \Longrightarrow x_i^{n_i+2} \leq (x_i x) x_{i-1} (y x_i).$$

从而 $\beta = \beta^{n_i+2} \leq (\beta_i\gamma)\beta_{i-1}(\delta\beta_i) \leq \beta_i\gamma$, $\delta\beta_i \leq \beta_i$. 故 $\beta_i = \beta_i\gamma = \beta_i\delta$. 由 1)

$$\alpha \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq \cdots \leq \beta_{n-1} \leq \alpha,$$

故 $\alpha = \beta_i, i = 1, 2, \cdots, n-1$. 由上证 $x_i x, y x_i \in S_{\beta_i} = S_\alpha$, 从 $(x_{i-1}, x_i) \in \eta$, 可得 $(x_{i-1}, x_i) \in \eta|_{S_\alpha}$. 从而 $(a,b) \in \eta^n$ 可推出 $(a,b) \in \eta^n|_{S_\alpha}$. □

定理 3.1.6 设 S 为序半群, $a \in S$, 则

$$N(a) = \{x \in S \mid (x,a) \in \rho\}.$$

证明 设 $A = \{x \in S \mid (x,a) \in \rho\}$, 由 ρ 是相容的得 A 为 S 的子半群. 又设 $x, y \in S$ 且 $xy \in A$, 则 $(xy, a) \in \rho$. 由

$(x,xy)\in\sigma$,$(y,xy)\in\sigma\subseteq\rho$ 且 ρ 的可传递性得出 $(x,a),(y,a)\in\rho$. 设 $x\in A$ 且 $x\leq z$, 容易验证 $z\in A$. 综上验证 A 为 S 的滤子.

设 F 为包含 a 的 S 的滤子. 则 $\forall w\in A$, 存在 $n\in\mathbf{Z}^+$ 使得 $(w,a)\in\sigma^n$. 由归纳法, 设 $n=1$, 则 $a^2\leq xwy, x,y\in S^1$. 从而 $a^4\leq(ax)w(ya)$, 由 $a^4\in F$, 可推出 $(ax)w(ya)\in F$, 从而 $w\in F$. 设 $n\geq 2$, 且 $(w,a)\in\sigma^{n-1}$ 能推出 $w\in F$. 设 $(w,a)\in\sigma^n$, 则存在 $c\in S$, $(w,c)\in\sigma$, $(c,a)\in\sigma^{n-1}$. 由归纳假设, $c\in F$, 从而 $w\in F$. 故 $A\subseteq F$. □

推论 3.1.7 $\xi=\mathcal{N}$ 且 ξ 的每个同余类是完全半格不可分解的.

证明 由定理 3.1.6, 我们有

$$\begin{aligned}\xi &= \{(a,b)\in S\times S\mid (b,a)\in\rho\wedge(a,b)\in\rho\}\\ &= \{(a,b)\in S\times S\mid b\in N(a)\wedge a\in N(b)\}\\ &= \{(a,b)\in S\times S\mid N(a)=N(b)\}=\mathcal{N}.\end{aligned}$$

又设 S_α 为 ξ 类, 且 $\eta|_{S_\alpha}$, $\rho|_{S_\alpha}$ 和 $\xi|_{S_\alpha}$ 分别表示 S_α 上的三个限制二元关系. 设 $a,b\in S_\alpha$, 则 $(a,b)\in\xi$, 即 $(a,b)\in\rho$ 且 $(b,a)\in\rho$. 设 $(a,b)\in\rho$, 则存在 $n\in Z^+$ 使得 $(a,b)\in\eta^n$, 由引理 3.1.5, $(a,b)\in\eta^n|_{S_\alpha}$, 从而 $(a,b)\in\rho_\alpha=\rho|_{S_\alpha}$; 同理可得 $(b,a)\in\rho_\alpha=\rho|_{S_\alpha}$. 故 $\xi_\alpha=\rho_\alpha\cap\rho_\alpha^{-1}\ni(a,b)$, 即 $\xi_\alpha=\mathcal{N}_\alpha$ 为 S_α 上的平凡同余, 从而 S_α 上没有非平凡的完全半格同余. □

定理 3.1.8 设 S 为序半群, 则下列各款成立:

1) $\forall a\in S, M(a)=\{x\in S\mid(a,x)\in\rho\}$ 为 S 的 a 生成的半素理想;

2) $M(ab)=M(a)\cap M(b),\forall a,b\in S$.

证明 显然 $a\in M(a)$, 由定理 3.1.6, $M(a)=\{x\in S\mid a\in N(x)\}$. 设 $x\in M(a),\forall y\in S$, 因为 $x\in N(xy)\cap N(yx)$,

所以 $a \in N(x) \subseteq N(xy), N(yx)$, 故 $xy, yx \in M(a)$. 又设 $y \leq x, y \in S$. 因为 $N(x) \subseteq N(y)$, 由 $a \in N(x)$ 得 $a \in N(y)$, 故 $y \in M(a)$. 另一方面, 设 $x^2 \in M(a)$, 则 $a \in N(x^2) = N(x)$, 从而 $x \in M(a)$. 综上所证 $M(a)$ 为 S 的半素理想.

设 I 为 S 的半素理想且 $a \in I$, 又设 $x \in M(a)$, 则 $(a, x) \in \rho$, 即 $(a, x) \in \sigma^n, n \in \mathbf{Z}^+$, 存在 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1} \in S$ 使得

$$(a, x_1), (x_1, x_2), \cdots, (x_{n-1}, x) \in \sigma.$$

由 $(a, x_1) \in \sigma$ 推出 $x_1^2 \in I(a) \subseteq I$, 从而 $x_1 \in I$; 又 $(x_1, x_2) \in \sigma$, 如此类 $\Longrightarrow$ 得 $x_2 \in I$, 直至 $x \in I$. 这就证明了 $M(a)$ 是最小的半素理想.

2) 显然 $M(ab) \subseteq M(a) \cap M(b)$. 设 $x \in M(a) \cap M(b)$, 由定理 3.1.6, $a \in N(x), b \in N(x)$, 故 $ab \in N(x)$, 即 $x \in M(ab)$.

□

推论 3.1.9 设 $M_S := \{M(a) \mid a \in S\}$, 在 M_S 上定义二元运算

$$M(a) * M(b) = M(ab),$$

则 $(M_S, *)$ 关于集合包含关系 $\subseteq$ 是一个序半群且为半格, 进一步地, $(M_S, *, \subseteq)$ 是 S 的最大完全半格同态像.

证明 由定理 3.1.8, $(M_S, *, \subseteq)$ 显然为半格, 作映射

$$f : S \longrightarrow M_S \mid a \longrightarrow M(a),$$

则 f 为序半群 S 到序半群 M_S 的满同态映射

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker} f &= \{(a, b) \in S \times S \mid f(a) = f(b)\} \\ &= \{(a, b) \in S \times S \mid a \in M(b) \wedge b \in M(a)\} \\ &= \{(a, b) \in S \times S \mid b \in N(a) \wedge a \in N(b)\} = \mathcal{N}. \end{aligned}$$

§2 阿基米德序半群的半格

定义 3.2.1 一个序半群 S 称为右阿基米德的 (r-archimedean) 如果

$$(\forall a, b \in S)\ (\exists m \in \mathbf{Z}^+)\ b^m \in (aS],$$

即 $(\forall a, b \in S)\ (\exists m \in \mathbf{Z}^+)\ b^m \leq ax, x \in S$. 对偶地可定义 S 为左阿基米德的 (l-archimedean) 的情形. S 称为阿基米德的 (archimedean), 如果

$$(\forall a, b \in S)\ (\exists m \in \mathbf{Z}^+)\ b^m \in (SaS].$$

如果 S 既是左阿基米德又是右阿基米德的, 称 S 为双阿基米德的 (t-archimedean). S 的一个序子半群 T 称为左 (右或双) 阿基米德的如果 T 作为一个序半群为左 (右或双) 阿基米德的.

由定义我们不难看出 S 为右 (左) 阿基米德的必为阿基米德序半群. 本节我们主要通过一个定理给出 S 为阿基米德序子半群的半格的刻画, 详见 [25].

定理 3.2.2 设 S 为序半群, 则下列各款等价:

(1) S 是 S 的序子阿基米德半群的半格;

(2) $(\forall a, b, c, d \in S)\ (\exists n \in \mathbf{Z}^+)\ (\exists x, y \in S)\ (abcd)^n \leq x(dcba)y$;

(3) $(\forall a, b \in S)\ (a, b) \in \tau \Longrightarrow (a^2, b^m) \in \tau, m \in \mathbf{Z}^+$;

(4) $(\forall a, b \in S)\ (a, b) \in \eta \Longrightarrow (a^2, b) \in \eta$;

(5) $\eta^2 \subseteq \eta$;

(6) $\mu = \xi$ 是 S 上的最大的半格同余且 μ 的每个同余类是阿基米德序子半群;

(7) S 为阿基米德序子半群的带;

(8) $(\forall a \in S)\ N(a) = \{b \in S \mid (b, a) \in \eta\}$;

(9) $\mathcal{N}$ 是 S 上的使每个同余类均为阿基米德序子半群的最大

半格同余;

(10) $(\forall a,b\in S)$ $(\forall k\in \mathbf{Z}^+)$ $(\exists n\in \mathbf{Z}^+)$ $(ab)^n\in (Sa^kS]$;

(11) $(\forall a,b\in S)$ $(\exists n\in \mathbf{Z}^+)$ $(ab)^n\in (Sa^2S]$;

(12) $(\forall a,b\in S)$ $(\forall k\in \mathbf{Z}^+)$ $(\exists n\in \mathbf{Z}^+)$ $(ab)^n\in (Sb^kS]$;

(13) $(\forall a,b\in S)$ $(\exists n\in \mathbf{Z}^+)$ $(ab)^n\in (Sb^2S]$;

(14) 设 A 为 S 的理想, 则 $\sqrt{A}$ 也为 S 的理想.

证明 (1)$\Longrightarrow$(2) 设 $S=\bigcup\limits_{\alpha\in Y} S_\alpha$, 即存在半格 Y 及 S 到 Y 的同态映射 ϕ 使得 $\alpha\phi^{-1}, \forall\alpha\in Y$ 是 S 的序子阿基米德半群. 设 $a,b,c,d\in S$, 则

$$(abcd)\phi=(a\phi)(b\phi)(c\phi)(d\phi)=(d\phi)(c\phi)(b\phi)(a\phi),$$

存在 $\alpha\in Y$ 使得 $abcd, dcba\in S_\alpha$. 因为 S_α 为 S 的阿基米德子半群, 故存在 $n\in \mathbf{Z}^+$ 使得

$$(abcd)^n\le x(dcba)y,\ x,y\in S_\alpha\subseteq S.$$

(2)$\Longrightarrow$(3) 设 $(a,b)\in\tau$, 则 $b\le xay$, $x,y\in S^1$, 从而 $b^3\le (bx)a(yb)$. 令 $u=bx, v=yb$, 则

$$b^6\le u(av)(ua)v.$$

由 (2), 存在 $n\in \mathbf{Z}^+$ 使得

$$[u(av)(ua)v]^n\le sv(ua)(av)ut,\ s,t\in S,$$

故

$$b^{6n}\le (svu)a^2(vut)\Longrightarrow (a^2,b^{6n})\in\tau.$$

(3) 和 (4) 等价是显然的.

(3)$\Longrightarrow$(5) 设 $(a,b)\in\eta, (b,c)\in\eta$, 则存在 $m,n\in \mathbf{Z}^+$ 使得 $(a,b^m)\in\tau$, $(b,c^n)\in\tau$. 设 $k\in \mathbf{Z}^+$ 使得 $2^k\ge m$, 重复使

用假设 (3), 则存在 $t \in \mathbf{Z}^+$ 使得 $(b^{2^k}, c^t) \in \tau$. 又 $(a, b^m) \in \tau$, 则 $(a, b^{2^k}) = (a, b^m \cdot b^{2^k - m}) \in \tau$. 因为 τ 是可传递的, 从而 $(a, c^t) \in \tau$. 即 $(a, c) \in \eta$.

(5)$\Longrightarrow$(6) 因为 η 是可传递的, 故 $\rho = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \eta^n = \eta$, 从而 $\xi = \mu$. 由定理 3.1.4, μ 为 S 的半格同余.

设 S_α 为 S 的任一 μ 类, 则 S_α 为 S 的序子半群, 设 $a, b \in S_\alpha$, 则 $(a, b) \in \eta \cap \eta^{-1}$, 存在 $n \in \mathbf{Z}^+$ 使得 $a^n \leq xby$, $x, y \in S^1$, 推出

$$a^{n+2} \leq (ax)b(ya).$$

因为 $(a, ax) \in \eta$, $(ax, a) \in \eta$, 所以 $(ax, a) \in \mu$, 即 $ax \in S_\alpha$, 同理可证 $ya \in S_\alpha$. 这就证明了 $a^{n+2} \in (S_\alpha b S_\alpha]$. 现设 δ 为 S 上的半格同余且每个 δ 类是阿基米德的, 设 $(a, b) \in \delta$, 即 $b \in (a)_\delta$, 存在 $x, y, u, v \in S$ 使得

$$b^m \leq xay, a^n \leq ubv,$$

故 $(a, b) \in \eta \cap \eta^{-1} = \mu$.

(6)$\Longrightarrow$(7) 显然.

(7)$\Longrightarrow$(1) 设 S 为序子阿基米德半群的带, 即存在带 B 及同态 $\phi : S \longrightarrow B$ 使得 $\beta\phi^{-1}, \beta \in B$ 为阿基米德子半群. 因为任意一个带是矩形带的半格, 即存在半格 Y 及同态 $\psi : B \longrightarrow Y$ 使得 $\alpha\psi^{-1}, \alpha \in Y$ 为矩形带. 设 $f = \phi \circ \psi$, 则 f 为 S 到 Y 的同态映射, 设 $\alpha \in Y$, $a, b \in \alpha f^{-1}$, 则

$$(a\phi)\psi = af = bf = (b\phi)\psi.$$

有 $a\phi, b\phi \in \alpha\psi^{-1}$. 又 $\alpha\psi^{-1}$ 为矩形带, 我们有

$$a\phi = (a\phi)(b\phi)(a\phi) = (aba)\phi.$$

由此推出 $a, aba \in (a\phi)\phi^{-1}$. 因为 $(a\phi)\phi^{-1}$ 为阿基米德子半群, 存在

$$m \in \mathbf{Z}^+, \quad x, y \in (a\phi)\phi^{-1} \subseteq \alpha f^{-1},$$

使得

$$a^m \leq x(aba)y = (xa)b(ay).$$

因为 $(xa)f = (xf)(af) = \alpha \cdot \alpha = \alpha^2 = \alpha$, 从而 $xa \in \alpha f^{-1}$, 同理可证 $ya \in \alpha f^{-1}$. 故 $a^m \in ((\alpha f^{-1})b(\alpha f^{-1})]$, 即 αf^{-1} 为 S 的阿基米德子半群.

以上我们证明了 (1) 至 (7) 是等价的.

(5)$\Longrightarrow$(8) 由于 η 是可传递的, 所以 $\rho = \eta$. 由定理 3.1.6, 得

$$N(a) = \{b \in S \mid (b,a) \in \rho\} = \{b \in S \mid (b,a) \in \eta\}.$$

(8)$\Longrightarrow$(9) 由 (8) 的假设

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \{(a,b) \in S \times S \mid a \in N(b) \wedge b \in N(a)\} \\ &= \{(a,b) \in S \times S \mid (a,b) \in \eta \wedge (b,a) \in \eta\} \\ &= \eta \cap \eta^{-1} = \mu. \end{aligned}$$

设 $(a,b) \in \eta$, 则 $a \in N(b)$, 从而 $a^2 \in N(b)$, 故 $(a^2, b) \in \eta$. 由 (1) 至 (7) 等价得出 μ 为 S 的使每个 μ 同余类均为阿基米德序子半群的最大半格同余.

(9)$\Longrightarrow$(5) 由 (1) 至 (7) 等价, (9)$\Longrightarrow$(5) 显然.

(1)$\Longrightarrow$(10) 设 S 为其序阿基米德子半群 S_α 的半格 Y, $\forall a, b \in S$, 存在 $\alpha, \beta \in Y$ 使得 $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$, 因此 $ab, a^k b \in S_{\alpha\beta}$. 因 $S_{\alpha\beta}$ 为阿基米德子半群, 所以存在 $n \in \mathbf{Z}^+$ 使得

$$(ab)^n \in (S_{\alpha\beta}(a^k b)S_{\alpha\beta}] \subseteq (Sa^k S].$$

(10)$\Longrightarrow$(11) 显然.

(11)$\Longrightarrow$(1) 设 $(a,b)\in\tau$, 则存在 $x,y\in S^1$ 使得 $b\leq xay$.

$$\forall m\in\mathbf{Z}^+,\quad b^{m+1}\leq x(ayx)^m ay.$$

由假设, 存在 $n\in\mathbf{Z}^+$ 使得 $(ayx)^n\in(Sa^2S]$, 故

$$b^{n+1}\leq x(ayx)^n ay\in(Sa^2S],$$

即 $(a^2,b^{n+1})\in\tau$, 由 (1) 与 (3) 等价得出 S 是序阿基米德子半群的半格.

(1)$\Longrightarrow$(12), 类似 (1)$\Longrightarrow$(10) 得出.

(12)$\Longrightarrow$(13), 类似 (10)$\Longrightarrow$(11) 得出.

(13)$\Longrightarrow$(1), 类似 (11)$\Longrightarrow$(1) 得出.

(1)$\Longrightarrow$(14) 设 A 为 S 的理想, $a\in\sqrt{A}$, $b\in S$, 则存在 $k\in\mathbf{Z}^+$ 使得 $a^k\in A$. 由 (1) 与 (10) 等价, 存在 $m,n\in\mathbf{Z}^+$ 使得 $(ab)^m\in(Sa^kS]\subseteq A$, $(ba)^n\in(Sa^kS]\subseteq A$, 因此, $ab,ba\in\sqrt{A}$. 又设 $b\leq a$, 由 $b^k\leq a^k$ 可得 $b^k\in A$, 即 $b\in\sqrt{A}$.

(14)$\Longrightarrow$(1) 设 $a,b\in S$ 且令 $A=(Sa^2S]$, 显然 A 为 S 的理想且 $a\in\sqrt{A}$. 由 (14), $\sqrt{A}$ 为 S 的理想, 则 $ab,ba\in\sqrt{A}$, 即存在 $n\in\mathbf{Z}^+$ 使得 $(ab)^n\in(Sa^2S]$. 由 (11) 与 (1) 等价, 得 (1) 成立. □

本节的最后我们给出一个阿基米德子半群的半格的例子.

例 3.2.3 设 $S=\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbf{Z}^+\}$, 定义 S 上的乘法运算

$$(\forall a,b\in S)\ \ ab=b,$$

即 S 为右零半群, 则 S 关于通常序关系构成一个序半群. 设 $a,b\in S$, $(a,b)\in\eta$. 因 $a^2=a$, 故 $(a^2,b)\in\eta$. 由定理 3.2.2, S 为序阿基米德半群的半格.

§3 弱可换的序半群

关于弱可换的序半群的刻画早在 1987 年左右就开始讨论，不过起初人们关注的是 poe 半群，证明了任何弱可换的 poe 半群一定是它的阿基米德子半群的半格．这时下列问题就提出了：这种半格分解是否是惟一的？弱可换的 poe 半群分解的阿基米德子半群是否一定为 pof 半群，即包含有最大元 f 的序子半群呢？这些问题均已经在 1990 年左右被解决 (详见 [26—32] 等)．这项工作后来发展为不要最大元 e，即一般的弱可换序半群应怎样刻画呢？这就涵盖了前面的大量工作．

定义 3.3.1 一个序半群 S 称为左弱 (右弱或弱) 可换的序半群如果

$$(\forall a,b\in S)\ (\exists n\in \mathbf{Z}^+)\ (ab)^n\in (bS]$$
$$((ab)^n\in (Sa] \text{ 或 } (ab)^n\in (bSa]).$$

设 S 是可换的，显然有 $(xy)^2=yxyx$，就可得出 S 是弱可换的．我们注意到例 3.2.3 中，

$$(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2})^n=(\frac{1}{2})^n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\forall n\in \mathbf{Z}^+,$$

但 $(\forall x\in S)\ \frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$，这样我们有

$$(\forall x\in S)\ (\forall n\in \mathbf{Z}^+)\ (\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2})^n\not\leq\frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{1}{3},$$

故 S 不是弱可换的．又因为

$$(\forall a,b\in S)\ (\exists n\in \mathbf{Z}^+)\ (ab)^n=b^n=b,(bS]=S.$$

故 S 为左弱可换的．

由弱可换的定义得出， S 为弱可换的当且仅当 S 是左弱可换与右弱可换的.

引理 3.3.2 一个序半群 S 是弱可换的当且仅当

$$(\forall x \in S)\ N(x) = \{y \in S \mid x^n \in (ySy], n \in \mathbf{Z}^+\}.$$

证明 必要性 设 $x \in S$

$$T := \{y \in S \mid x^n \in (ySy], n \in \mathbf{Z}^+\}.$$

因为 $x^3 \in (xSx]$, 所以 $\emptyset \neq T \subseteq S$. 设 $y, z \in T$, 则存在 $n, m \in \mathbf{Z}^+$ 使得 $x^n \leq yay$, $x^m \leq zbz, a, b \in S$. 故 $x^{n+m} \leq ya(yzbz)$. 因为 S 是弱可换的, 存在 $k \in \mathbf{Z}^+$ 使得

$$(ya(yzbz))^k \in ((yzbz)Sya] \subseteq (yzS],$$

因此,

$$x^{(n+m)k} \leq (ya(yzbz))^k \in (yzS].$$

类似地, 我们有 $x^{(n+m)l} \in (Syz]$. 故

$$x^{(n+m)(k+l)} \in (yzS](Syz] \subseteq (yzSyz],$$

即 $yz \in T$. 设 $y, z \in S$ 且 $yz \in T$, 则

$$x^n \in (yzSyz] \subseteq (yS], x^n \leq ya, a \in S.$$

又 S 是弱可换的, 故存在 $m \in \mathbf{Z}^+$, 使得 $(ya)^n \in (aSy]$, 由 $x^n \leq ya$ 得

$$x^{mn} \leq (ya)^n \in (aSy] \Longrightarrow x^{mn} \in (aSy],$$

故

$$x^{mn+n} \in (yS](aSy] \subseteq (ySy].$$

由此推出 $y\in T$, 同理得出 $z\in T$. 设 $a\in T, c\geq a$, 由 $x^n\in (aSa]\subseteq (cSc]$ 可得 $c\in T$. 由上证明得 T 为 S 的滤子且包含 x. 设 F 为包含 x 的 S 滤子, 设 $y\in T$, 由 $x^n\in (ySy]$ 可得 $y\in F$, 因此 $T=N(x)$.

充分性　设 $x,y\in S$, 因为 $yx\in N(xy)$, 存在 $n\in \mathbf{N}$ 使得

$$(xy)^n\in ((yx)S(yx)]\subseteq (ySx].$$

□

定理 3.3.3　一个弱可换的序半群 S 是阿基米德序半群的半格, 一般情况下分解不是惟一的. 但 S 是惟一的阿基米德序半群的完全半格.

证明　设 $(a,b)\in\eta$, 则存在 $u,v\in S$ 使得

$$b^n\leq uav=(ua)v=u(av), n\in \mathbf{Z}^+.$$

由 S 的弱可换得, 存在 $m,k\in \mathbf{Z}^+$ 使得

$$b^{nm}\leq ((ua)v)^m\in (vSua]\subseteq (Sa],$$

$$b^{nk}\leq (u(av))^k\in (avSu]\subseteq (aS],$$

故 $b^{mn+nk}\in (Sa^2S]$, 即 $(a^2,b)\in\eta$. 由定理 3.2.2, S 为阿基米德半群的半格. 设 σ 为 S 上的完全半格同余且 $(x)_\sigma, \forall x\in S$ 是 S 的阿基米德子半群. 由定理 3.2.2, $\mathcal{N}$ 是 S 满足上述条件的最大的半格同余, 因此 $\sigma\subseteq\mathcal{N}$. 又 $\mathcal{N}$ 为 S 上最小的完全半格同余, 故 $\mathcal{N}\subseteq\sigma$, 由此推出 $\sigma=\mathcal{N}$.

至于一般情况非惟一性的证明, 我们可通过以下反例来说明.

例 3.3.4　设 $(S,\cdot,\leq)$ 是一个序半群, $S=\{a,b,c,d,f\}$, 其上的运算和序关系定义如下:

·	a	b	c	d	f
a	b	a	a	a	a
b	a	b	b	b	b
c	a	b	b	b	b
d	a	b	b	d	d
f	a	b	c	d	f

$$\leq := \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(f,f),(d,b),(d,c)\}.$$

设

$$\sigma_1 : = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),\\ (c,a),(c,b),(c,c),(d,d),(f,f)\}.$$

则 σ_1 为 S 上的半格同余. 由 $d < b, db = b$, $(b)_{\sigma_1} = \{a,b,c\}$, $(d)_{\sigma_1} = \{d\}$, 所以 $(db)_{\sigma_1} \neq (d)_{\sigma_1}$, 即 σ_1 不是 S 上的完全同余, 当然 $\sigma_1 \neq \mathcal{N}$. 但 $\forall x \in S$, $(x)_{\sigma_1} = \{a,b,c\}$, 或 $\{d\}$, 或 $\{f\}$ 是 S 的阿基米德子半群. □

由例 3.2.3 和本节前面的说明, 定理 3.3.3 的逆是不成立的, 即设 S 为阿基米德序半群的半格, S 不一定是弱可换的, 本节以下部分我们主要给出 S 是弱可换的刻画.

定理 3.3.5 设 S 为序半群, 则下列各款是等价的:

1) S 是左弱可换的;

2) $\tau \subseteq \eta_r$;

3) μ_r 是 S 上的使得每个同余类均为右阿基米德子半群的最大半格同余;

4) S 是右阿基米德半群的半格;

5) $(\forall a \in S)\ N(a) = \{b \in S \mid (b,a) \in \eta_r\}$;

6) $(\forall a,b \in S)\ (b,ab) \in \eta_r$;

7) $\mathcal{N}$ 是 S 上的使每个同余类 $(x)_{\mathcal{N}}$ 均为右阿基米德子半群的最大半格同余.

证明 1)$\Longrightarrow$2) 设 $(a,b)\in\tau$, 则存在 $u,v\in S$ 使得 $b^n\le uav, n\in\mathbf{Z}^+$. 因为 S 是左弱可换的, 对 $u,av\in S$, 存在 $m\in\mathbf{Z}^+$ 使得 $(u(av))^m\in(avSu]\subseteq(aS]$, 即 $b^{mn}\in(aS]$, $(a,b)\in\eta_r$.

2)$\Longrightarrow$3) 设 $(a,b)\in\tau$, 则存在 $u,v\in S$ 使得 $b\le uav$. 由假设 $(a,b)\in\eta_r$, 即存在 $n\in\mathbf{Z}^+$ 使得 $b^n\in(aS]$, 又 $(a,uva)\in\tau$, 故 $(a,uva)\in\eta_r$, 即存在 $k\in\mathbf{Z}^+$ 使得 $(uva)^k\in(aS]$. 由此推出

$$b^{k+1}\le(uav)^{k+1}=ua(vua)^kv\in ua(aS]v\subseteq(Sa^2S],$$

即 $(a^2,b^{k+1})\in\tau$. 由定理 3.2.2, $\mu=\eta\cap\eta^{-1}$ 为 S 上的使得每个同余类 $(x)_\mu$, $x\in S$ 均为阿基米德子半群的最大的半格同余. 显然 $\eta_r\subseteq\eta$, 又设 $(a,b)\in\eta$, 则存在 $k\in\mathbf{Z}^+$, $x,y\in S^1$ 使得 $b^k\le xay$. 由 $(a,xay)\in\tau$ 和假设, 存在 $n\in\mathbf{Z}^+$ 使得 $(xay)^n\le aw$, $w\in S^1$. 故 $b^{nk}\le aw$, 即 $(a,b)\in\eta_r$. 由上证明我们得出

$$\mu_r=\eta_r\cap\eta_r^{-1}=\eta\cap\eta^{-1}=\mu.$$

设 A 为 S 的一个 μ 类, 则 A 为阿基米德子半群. 设 $a,b\in A$, 存在 $k\in\mathbf{Z}^+$, $x,y\in A$ 使得 $b^k\le xay$. 因为 $(a,xay)\in\tau$, 由假设 $(a,xay)\in\eta_r$, 即存在 $w\in S^1$ 和 $n\in\mathbf{Z}^+$ 使得 $(xay)^n\le aw$, 从而

$$b^{kn+1}\le a(wb).$$

由于 $b^{kn+1}\le a(wb)\cdot 1$, $(b,wb)\in\tau\subseteq\eta$, 所以 $(b,wb)\in\eta\cap\eta^{-1}=\mu$. 因为 $(b)_\mu=A$, 故 $wb\in A$. 由此得 A 为右阿基米德的.

设 δ 为 S 上的使得每个同余类 $(x)_\delta$, $x\in S$ 均为右阿基米德子半群的 S 的半格同余, 则 δ 也为 S 上的使得每个同余类 $(x)_\delta, x\in S$ 为阿基米德子半群的 S 的半格同余. 由定理 3.2.2, $\delta\subseteq\mu$.

3)$\Longrightarrow$4) 显然.

4)$\Longrightarrow$1) 设 $S=\bigcup_{\alpha\in Y}S_\alpha$, Y 为半格, S_α 为 S 的右阿基米德子半群. $\forall a,b\in S$, 存在 $\alpha\in Y$ 使得 $ab,ba\in S_\alpha$, 从而存在 $m\in \mathbf{Z}^+$ 使得 $(ab)^m\leq bax$, $x\in S_\alpha$, 故 $(ab)^m\in (bS]$, 即 S 为左弱可换的.

2)$\Longrightarrow$5) 由 2)$\Longrightarrow$3), 我们已有 $\eta=\eta_r$ 且 S 为阿基米德半群的半格, 由定理 3.2.2,

$$(\forall a\in S)\ N(a)=\{b\in S\mid (b,a)\in\eta\}=\{b\in S\mid (b,a)\in\eta_r\}.$$

5)$\Longrightarrow$ 6) $\forall a,b\in S$, 因为 $ab\in N(ab)$ 推出 $b\in N(ab)$, 故 $(b,ab)\in\eta_r$.

6)$\Longrightarrow$1) $\forall a,b\in S$ 由 $(b,ab)\in\eta_r$ 显然得出 S 是左弱可换的.

2)$\Longrightarrow$7) 由定理 3.2.2, 不难看出 $\mathcal{N}=\mu=\mu_r$.

7)$\Longrightarrow$2) 由 7) 显然有 4), 因为 4) 与 2) 等价, 结论证毕.

□

由定理 3.3.5 的对偶定理, 可得出 S 为右弱可换的刻画定理, 进一步地我们有下列弱可换的刻画, 证明类似上定理.

定理 3.3.6 设 S 为序半群, 则下列各款是等价的:

1) S 是弱可换的;

2) $\tau\subseteq\eta_t$;

3) μ_t 是 S 上的使得 μ_t 的每个同余类为双阿基米德的序子半群的最大的半格同余;

4) S 是双阿基米德半群的半格;

5) $(\forall a\in S)\ N(a)=\{b\in S\mid (b,a)\in\eta_t\}$;

6) $(\forall a,b\in S)\ (b,ab)\in\eta_t,(b,ab)\in\eta_t$;

7) $\mathcal{N}=\mu_t$.

§4 弱右阿基米德序半群的带

在第二节中我们已经知道，一个序半群是阿基米德序半群的半格当且仅当它是阿基米德序半群的带．所以我们这里仅仅讨论一个序半群的右阿基米德序半群的带分解问题，这个问题的一般情况到现在为止并没有完全解决．但是我们可以给出一个序半群 S 为弱右阿基米德序半群的带的刻画．主要结果来自 [33].

定义 3.4.1 设 T 为序半群 S 的序子半群，T 称为是弱右阿基米德的 (weakly r-archimedean) 如果

$$(\forall a, b \in T)\ (\exists m \in \mathbf{Z}^+)\ (\exists s \in S)\ b^m \leq as.$$

等价地，$\forall a, b \in T$, 存在 $m \in \mathbf{Z}^+$ 使得 $b^m \in (aS]$.

显然 T 为右阿基米德的，则 T 必为弱右阿基米德的．反之该结论是不对的，我们有以下反例：

例 3.4.2 设 $S = \{a, b, c, d\}$. 在 S 上定义乘法和序关系如下：

·	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	b	b
c	a	c	c	c
d	a	d	d	d

$$\leq := \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (b,a), (c,a), (d,a)\}.$$

则 $(S, \cdot, \leq)$ 是序半群．令 $T = \{b, c\}$, 则 T 为 S 的序子半群且 T 为弱右阿基米德的，因为 $b \leq c \cdot a = a$, $c \leq b \cdot a = a$. 但是 T 不是右阿基米德的．事实上，如果 T 为右阿基米德的，则 $b, c \in T$,

存在 $m\in\mathbf{Z}^+$ 和 $x\in T$ 使得 $b^m\le c\cdot x$. 因为 $c\cdot x=c$, 有 $b^m=b\le c$, 矛盾.

由弱阿基米德的定义及已知在一般半群理论中的事实，不难看出

引理 3.4.3 序半群 S 的一个序子半群 T 为弱阿基米德的当且仅当

$$(\forall a,b\in T)\ \ (a,b)\in\eta_r\cap\eta_r^{-1}.$$

引理 3.4.4 设 S 是序半群, σ_1,σ_2 为 S 上的二元关系. 如果 σ_1 , σ_2 关于 S 的运算均为左 (右) 相容的, 则 $(\sigma_1)^n$ 和 $(\sigma_1\circ\sigma_2)^n$ 也是, $\forall n\in\mathbf{Z}^+$.

定理 3.4.5 设 S 是序半群, 则 S 是弱右阿基米德序子半群的带当且仅当 S 满足条件

$$(*)\qquad (\forall a\in S)\ (x,y\in S^1)\ (xay,xa^2y)\in\eta_r\cap\eta_r^{-1}.$$

证明 必要性 设 S 存在一个带同余 ρ, $S/\rho=B$ 是带且

$$S=\bigcup_{\alpha\in B}S_\alpha,\quad S_\alpha:=\{x\in S\mid(x)_\rho=\alpha\}$$

是弱右阿基米德的. $x,y\in S^1$ 及 $a\in S$, 因为 ρ 为带同余, 所以 $(xay,xa^2y)\in\rho$. 因此存在 $\alpha\in B$ 使得 $xay,xa^2y\in S_\alpha$. 因为 S_α 是弱右阿基米德的, 由引理 3.4.3, 我们有 $(xay,xa^2y)\in\eta_r\cap\eta_r^{-1}$.

充分性 设 S 满足条件 $(*)$. 为了证明 S 是弱右阿基米德的带, 我们分以下几步:

A) $\forall a\in S$, 显然 $(a,a)\in\eta_r\cap\eta^{-1}$.

B) η_r 是传递的. 事实上, 设 $(a,b)\in\eta_r,(b,c)\in\eta_r$. 则

$$(\exists m,n\in\mathbf{Z}^+)(\exists s_1,s_2\in S^1)\ \ b^m\le as_1,c^n\le bs_2.$$

由假设,

$$(bs_2, b^2s_2) = (1bs_2, 1b^2s_2) \in \eta_r \cap \eta_r^{-1},$$

因此 $(b^2s_2, bs_2) \in \eta_r$. 即存在$m_1 \in Z^+$ 和 $s_3 \in S^1$ 使得 $(bs_2)^{m_1} \leq b^2s_2s_3$. 故 $c^{nm_1} \leq b^2s_2s_3$. 类似于上述过程, 因为 $(b^2s_2s_3, b^4s_2s_3) \in \eta_r \cap \eta_r^{-1}$, 所以存在 $k \in \mathbf{Z}^+$, $s \in S^1$ 使得 $c^k \leq b^4s$. 由归纳法, 设 $j \in \mathbf{Z}^+$, $2^j \geq m$, 存在 $k_1 \in \mathbf{Z}^+$, $s_1 \in S^1$ 使得 $c^{k_1} \leq b^{2^j}s$. 因此

$$c^{k_1} \leq b^m(b^{2^j-m}s) \leq a(s_1b^{2^j-m}s).$$

故 $(a, c) \in \eta_r$.

由 A) 和 B) 得出 $\eta_r \cap \eta_r^{-1}$ 是 S 上的等价关系. 由 [35] 中的性质 5.13,

$$\rho := \{(a,b) \in S \times S \mid (\forall x, y \in S^1)\ (xay, xby) \in \eta_r \cap \eta_r^{-1}\}$$

是 S 的包含在 $\eta_r \cap \eta_r^{-1}$ 中的最大的同余. 显然 ρ 为 S 的带同余.

C) 设 $S/\rho = B$, $\alpha \in B$. 则 ρ 类 $S_\alpha := \{x \in S \mid (x)_\rho = \alpha\}$ 是弱右阿基米德的. 事实上, $\forall a, b \in S$, 如果 $a, b \in S_\alpha$, 则 $(a, b) \in \rho$. 由此导出 $(a, b) \in \eta_r \cap \eta_r^{-1}$. 根据引理 3.4.3, S_α 是 S 的弱右阿基米德序子半群. □

定理 3.4.6 设 S 为序半群且设

$$\rho := \{(a,b) \in S \times S \mid (\forall x, y \in S^1)\ (xay, xby) \in \eta_r \cap \eta_r^{-1}\}$$

是 S 上的同余, 则 ρ 为 S 的正则同余.

证明 根据 S 上正则同余的定义 (见第二章), 我们首先在商半群 $(S/\rho, \cdot)$ 上引入二元关系

$$\preceq:\ =\ \{((x)_\rho, (y)_\rho) \in S/\rho \times S/\rho \mid (\exists x_1 \in (x)_\rho)(\exists y_1 \in (y)_\rho)$$
$$(\exists m \in Z^+)\ \ (x_1, y_1) \in (\leq \circ \rho)^m\}.$$

则

1) $(S/\rho,\cdot,\preceq)$ 是序半群. 事实上,

A) 因为 $x\le x\rho x,\forall x\in S$, 我们有 $(x,x)\le\circ\rho$. 因此

$$((x)_\rho,(x)_\rho)\in\preceq.$$

B) 设 $(x)_\rho\preceq(y)_\rho$, $(y)_\rho\preceq(x)_\rho$. 那么存在

$$x_1,x_2\in(x)_\rho,y_1,y_2\in(y)_\rho$$

和 $n,m\in\mathbf{Z}^+$ 使得

$$(x_1,y_1)\in(\le\circ\rho)^m,\quad(y_2,x_2)\in(\le\circ\rho)^n.$$

因此存在

$$z_1,z_2,\cdots,z_m,w_1,w_2,\cdots,w_{m-1},w_m(=y_1)\in S,$$

使得

$$x_1\le z_1\rho w_1\le\cdots\le z_i\rho w_i\le\cdots\le z_m\rho w_m(=y_1),\qquad(1)$$

且存在

$$z_1',z_2',\cdots,z_n',w_1',w_2',\cdots,w_{n-1}',w_n'(=x_2)\in S,$$

使得

$$y_2\le z_1'\rho w_1'\le\cdots\le z_j'\rho w_j'\le\cdots\le z_n'\rho w_n'(=x_2),\qquad(2)$$

由 (1), 存在 $k\in\mathbf{Z}^+$, $s\in S^1$ 使得

$$(\forall x,y\in S^1)\quad(xx_1y)^k\le xy_2ys,$$

即 $(xy_2y,xx_1y)\in\eta_r$. 我们仅仅证明 $m=2$ 时这一结果成立, 当 $m\ge3$ 时我们可以用类似的方法证得上述结果成立. 设 $m=$

2, (1) 变为 $x_1 \le z_1 \rho w_1 \le z_2 \rho y_1$. 因为 $(z_1, w_1) \in \rho$, 我们有 $(xz_1y, xw_1y) \in \eta_r \cap \eta_r^{-1}$, $\forall x, y \in S^1$. 那么存在 $k_1 \in \mathbf{Z}^+$ 和 $s_1 \in S^1$ 使得

$$(xx_1y)^{k_1} \le (xz_1y)^{k_1} \le xw_1ys_1 \le xz_2ys_1.$$

因为 $(z_2, w_2) \in \rho$, 我们有 $(xz_2ys_1, xw_2ys_1) \in \eta_r \cap \eta_r^{-1}$. 因此存在 $k_2 \in \mathbf{Z}^+$ 和 $s_2 \in S^1$ 使得 $(xz_2ys_1)^{k_2} \le xw_2ys_1s_2$. 故

$$(xx_1y)^{k_1k_2} \le (xw_2ys_1)^{k_2} \le xw_2ys_1s_2 = xy_1ys_1s_2.$$

因为 $(y_1, y_2) \in \rho$, 我们有 $(xy_1ys_1s_2, xy_2ys_1s_2) \in \eta_r \cap \eta_r^{-1}$, 那么存在 $k_3 \in \mathbf{Z}^+$ 和 $s_3 \in S^1$ 使得 $(xy_1ys_1s_2)^{k_3} \le xy_2ys_1s_2s_3$, 即 $(xx_1y)^{k_1k_2k_3} \le xy_2ys_1s_2s_3$. 令 $k = k_1k_2k_3$, $s = s_1s_2s_3$, 那么 $(xx_1y)^k \le xy_2ys$, 即 $(xy_2y, xx_1y) \in \eta_r$,

类似以上证明过程, 由 (2), 我们能证明存在 $t \in \mathbf{Z}^+$ 和 $r \in S^1$ 使得

$$(\forall x, y \in S^1) \quad (xy_2y)^t \le xx_1yr,$$

即 $(xx_1y, xy_2y) \in \eta_r$, $\forall x, y \in S^1$. 因此 $(xx_1y, xy_2y) \in \eta_r \cap \eta_r^{-1}$, 即 $(x_1, y_2) \in \rho$. 由此得出 $(x)_\rho = (x_1)_\rho = (y_2)_\rho = (y)_\rho$.

C) 设 $(x)_\rho \preceq (y)_\rho, (y)_\rho \preceq (z)_\rho$. 那么存在 $x_1 \in (x)_\rho$, $y_1, y_2 \in (y)_\rho$, $z_1 \in (z)_\rho$ 和 $m, n \in \mathbf{Z}^+$ 使得

$$(x_1, y_1) \in (\le \circ \rho)^m, \quad (y_2, z_1) \in (\le \circ \rho)^n.$$

那么

$$(x_1, z_1) \in (\le \circ \rho)^m \circ \rho \circ (\le \circ \rho)^n.$$

因为 $\rho \circ \rho \subseteq \rho$, 我们有 $(x_1, z_1) \in (\le \circ \rho)^{m+n}$. 因此 $(x)_\rho \preceq (z)_\rho$, 即 $\preceq$ 是传递的.

D) 设 $(x)_\rho \preceq (y)_\rho, \forall (c)_\rho \in S/\rho$. 那么存在 $x_1 \in (x)_\rho$, $y_1 \in (y)_\rho$ 和 $m \in \mathbf{Z}^+$ 使得 $(x_1, y_1) \in (\le \circ \rho)^m$. 因为 $\le$ 和 ρ 均

为 S 上的关于 S 的乘法运算是相容的二元关系，由引理 3.4.4, 我们有

$$(cx_1, cy_1) \in (\leq \circ \rho)^m, \quad (x_1c, y_1c) \in (\leq \circ \rho)^m.$$

因为 $cx_1 \in (cx)_\rho, x_1c \in (xc)_\rho$, 所以

$$(cx)_\rho = (c)_\rho(x)_\rho \quad \preceq \quad (cy)_\rho = (c)_\rho(y)_\rho;$$
$$(xc)_\rho = (x)_\rho(c)_\rho \quad \preceq \quad (yc)_\rho = (y)_\rho(c)_\rho.$$

2) 作映射

$$\varphi : S \to S/\rho \mid x \to (x)_\rho.$$

设 $x \leq y$, 则 $(x, y) \in \leq \circ \rho$. 因此 $(x)_\rho \preceq (y)_\rho$. 故 φ 是 S 到 S/ρ 的同态映射. □

由定理 3.4.6, 我们显然有

推论 3.4.7 一个序半群 S 是弱右阿基米德序子半群的带当且仅当 S 是弱右阿基米德序子半群的正则带.

一般半群 $(S, \cdot)$ 可以认为是赋予平凡序 $\leq := \{(x, y) \mid x = y\}$ 的序半群，我们有

推论 3.4.8 设 S 为半群，则下列各款等价：

1) S 是右阿基米德序半群的带；

2) S 是弱右阿基米德序半群的带；

3) $(\forall x, y \in S^1)$ $(\forall a \in S)$ $(xay, xa^2y) \in \eta_r \cap \eta_r^{-1}$.

证明 由定理 3.4.5 和定理 3.4.6, 1) $\Longrightarrow$ 2) , 2) $\Longrightarrow$ 3) 是显然的. 3)$\Longrightarrow$ 1) 可参见 [34]. □

我们下面给一个例子.

例 3.4.9 设 $S = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{Z}^+\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\}$. 赋予 S 通常的乘法及序关系， S 为一个序半群.

(1) S 不是弱右阿基米德的，因为

$$(\forall n \in \mathbf{Z}^+)\ (\forall x \in S)\ \ 1 = 1^n \not\leq \frac{1}{2}x.$$

(2) 因为 $\eta_r \cap \eta_r^{-1} = (S_1 \times S_1) \cup \{(1,1)\}$, 这里 $S_1 = S \backslash \{1\}$. 设 $\forall a \in S$, 当 $a = 1$ 时, 显然 $(xay, xa^2y) \in \eta_r \cap \eta_r^{-1}$, $\forall x, y \in S^1$; 当 $a \neq 1$ 时，那么 $(xay, xa^2y) \in S_1 \times S_1 \subseteq \eta_r \cap \eta_r^{-1}$. 由定理 3.4.5, S 是 S 的弱右阿基米德序子半群的带. 事实上,

$$\begin{aligned} \rho: &= \{(a,b) \in S \times S \mid (\forall x, y \in S^1)(xay, xby) \in \eta_r \cap \eta_r^{-1}\} \\ &= \eta_r \cap \eta_r^{-1}. \end{aligned}$$

因此 $S/\rho = S_1 \cup \{1\}$.

(3) 在 S/ρ 上我们定义二元关系

$$\preceq := \{(S_1, S_1), (\{1\}, \{1\}), (S_1, \{1\}\}.$$

则 $(S/\rho, \cdot, \preceq)$ 是序半群且 $\varphi:\ \ S \longmapsto S/\rho \mid a \longmapsto (a)_\rho$ 显然是两序半群之间的同态映射.

在这节的最后，我们试图讨论什么条件下一个序半群是右阿基米德半群的半格. 到现在为止，我们仅仅有

定理 3.4.10 设 S 是负序半群，那么 S 是右阿基米德序半群的带当且仅当 S 满足条件 (1).

证明 由定理 3.4.5, 我们仅需证明充分性. 设 S 满足条件 (2), 由定理 3.4.5, S 上存在带同余

$$\rho := \{(a,b) \in S \times S \mid (\forall x, y \in S^1)(xay, xby) \in \eta_r \cap \eta_r^{-1}\}.$$

使得 S 的每个 ρ 类 $S_\alpha := \{x \in S \mid (x)_\rho = \alpha, \alpha \in S/\rho = B\}$ 是弱阿基米德的.

设 $a,b\in S_\alpha$. 则 $(a)_\rho=(b)_\rho$, 从而 $(a^2,b)\in\eta_r\cap\eta_r^{-1}$, 即存在 $m\in Z^+, s\in S^1$ 使得

$$b^m\le a^2s=a(as).$$

要证 S_α 为右阿基米德的，我们仅需证 $as\in S_\alpha$. 事实上，因为 $(as,a^2s)\in\rho$, 所以

$$(\forall x,y\in S^1)\ \ (xasy,xa^2sy)\in\eta_r\cap\eta_r^{-1}.$$

那么存在 $m_1\in\mathbf{Z}^+$, $s_1\in S^1$ 使得 $(xa^2sy)^{m_1}\le xasys_1$. 由此推出

$$(xb^my)^{m_1}\le(xa^2sy)^{m_1}\le xasys_1.$$

故

$$(xasy,xb^my)\in\eta_r. \tag{3}$$

另一方面，因为 $(a,b)\in\rho$, 从而 $(as,b^ms)\in\rho$, 即

$$(xasy,xb^msy)\in\eta_r\cap\eta_r^{-1},\forall x,y\in S^1.$$

故存在 $n\in\mathbf{Z}^+, s_2\in S^1$ 使得 $(xasy)^n\le xb^msys_2$. 因为 S 是负序的，所以 $sy\le y$. 故 $(xasy)^n\le xb^mys_2$, 即

$$(xasy,xb^my)\in\eta_r^{-1}. \tag{4}$$

由 (3) 和 (4), 得出 $(as,b^m)\in\rho$, 即 $(b)_\rho=(b^m)_\rho=(as)_\rho$, $as\in S_\alpha$, 定理得证.

§5 正则序半群

正则序半群的研究我们可以追溯到 20 世纪 30 年代，冯 · 诺伊曼引入了正则环的概念，之后， 1956 年 Kovács 证明一个环是正则环当且仅当对环 R 的每个右理想 A 和左理想 B 满足

$A\cap B=AB$. 同年 Iséki 把这个结论推广到半群中，同时证明一个可换半群是正则的当且仅当 S 的每个理想是幂等的. 这也开创了用半群 S 的子集来刻画 S 的正则性以及其他一些性质的先河. 1961 年, Calais 进一步证明了一个半群 S 是正则的当且仅当 S 的每个右理想 A 和左理想 B 是幂等的且 AB 是 S 的拟理想. 关于正则半群的刻画 S. Lajos 也做了大量的工作，怎样把这一整套思想平移到序半群中来，还需要做些概念上的修正，这自然是人们感兴趣的问题. Kehayopulu 首先把正则 (包括内禀正则) 的概念引入到 ∨e 半群 [36], 通过左、右理想元和拟理想元来给出 ∨e 半群 (或称带最大元的格序半群) 为正则 (内禀正则) 的刻画，这部分内容读者可参见 Kehayopulu 在 1980 年前后的工作，因为本节所写的内容将完全取代和覆盖她早期的工作，这里就不再论述了. 1990 年左右人们考虑 poe 半群，刻画其正则性，本节将尽量考虑一般的序半群.

前面 (第一章) 已经给出一个序半群 S 是正则的定义，即 $\forall A\subseteq S$, $A\subseteq(ASA]$, 等价于, $\forall a\in S, a\in(aSa]$. 如果 S 为 poe 半群, S 为正则的当且仅当 $\forall a\in S$, $a\leq aea$. 设 $A\subseteq S$, 则 A 生成的左理想 $l(A)=(A\cup SA]$, A 生成的右理想 $r(A)=(A\cup AS]$. 下面我们给出正则序半群的刻画.

定理 3.5.1 一个序半群是正则的当且仅当对 S 的每个右理想 A 和每个左理想 B, $A\cap B\subseteq(AB]$, 等价地, $A\cap B=(AB]$.

证明 必要性 设 A,B 分别为 S 的右理想和左理想，则

$$\begin{aligned}A\cap B &\subseteq ((A\cap B)S(A\cap B)]\subseteq(ASB]\subseteq(AB]\\ &\subseteq (AS]\cap(SB]\subseteq(A]\cap(B]=A\cap B.\end{aligned}$$

充分性 设 $A\subseteq S$, 那么

$$\begin{aligned}A &\subseteq r(A)l(A)\subseteq(r(A)l(A)]=((A\cup AS](A\cup SA]]\\ &= ((A\cup AS)(A\cup SA)]=(A^2\cup ASA],\end{aligned}$$

$$A^2 \subseteq (A^2 \cup ASA](A] \subseteq (A^3 \cup ASA^2] \subseteq (ASA].$$

因此,

$$A \subseteq ((ASA] \cup ASA] = ((ASA]] = (ASA].$$

□

如果利用拟理想, 我们有以下刻画.

定理 3.5.2 一个序半群 S 是正则的当且仅当 S 的所有左理想和右理想均为幂等的且对 S 的每个右理想 A 和每个左理想 B, $(AB]$ 是 S 的拟理想.

证明 必要性 设 A 为 S 的右理想, B 为 S 的左理想, 因为 S 是正则的, 所以

$$A \subseteq (ASA] \subseteq (A^2] \subseteq (AS] \subseteq (A] = A,$$

即 $A = (A^2]$. 同理可证 $B = (B^2]$. 由定理 3.5.1, 因为 $A \cap B = (AB]$, 我们仅需证明 $A \cap B$ 为 S 的拟理想即可. 事实上,

$$(A \cap B)S \cap S(A \cap B) \subseteq AS \cap SB \subseteq A \cap B.$$

且设 $a \in A \cap B$, $S \ni b \leq a$, 则 $b \in A \cap B$.

充分性 设 $A \subseteq S$, $r(A)$ 为 S 的右理想, 由假设,

$$\begin{aligned} A &\subseteq r(A) \subseteq ((r(A))^2] = ((A \cup AS](A \cup SA]] \\ &= (A^2 \cup ASA \cup A^2S \cup ASAS] \subseteq (AS], \end{aligned}$$

类似地从 $A \subseteq l(A)$ 可得 $A \subseteq (SA]$, 即

$$A \subseteq (AS] \cap (SA].$$

又 $(AS]$ 和 $(SA]$ 分别为 S 的右理想和左理想, 由假设

$$(AS] \cap (SA] \subseteq ((AS]^2] \cap ((SA]^2] \subseteq ((ASA]S] \cap (S(ASA]].$$

又

$$(ASA] = ((AS]A] = ((AS^2]A] = ((AS](SA]].$$

因为 $((AS](SA]]$ 为 S 的拟理想，故 $(ASA]$ 为 S 的拟理想，因此

$$((ASA]S] \cap (S(ASA]] \subseteq (ASA].$$

故 $A \subseteq (AS] \cap (SA] \subseteq (ASA]$. □

推论 3.5.3 设 S 为可换的，则 S 为正则的当且仅当 S 的每个理想是幂等的.

证明 由上定理，我们仅仅需证充分性. 设 A, B 为 S 的理想，则

$$A \cap B = ((A \cap B]^2] = ((A \cap B)(A \cap B)] \subseteq (AB].$$

□

推论 3.5.4 设 S 为正则序半群，则 S 的拟理想和双理想是一致的.

证明 设 S 为正则的，B 为 S 的双理想，则 $BSB \subseteq B$ 且 $B \subseteq (BSB]$, 因此 $(BSB] = B$. 又因为 $(BS], (SB]$ 分别为 S 的右、左理想，由定理 3.5.1,

$$\begin{aligned}(BS] \cap (SB] &\subseteq ((BS](SB]] = (BS^2B] \\ &= (B(S^2]B] = (BSB] = B.\end{aligned}$$

反之，设 Q 为拟理想，因为

$$QSQ \subseteq QS \cap SQ \subseteq (QS] \cap (SQ] \subseteq Q,$$

所以 Q 是双理想. □

注 3.5.5 在一般的半群中，包含 0 的可换正则半群不包含非零的幂零元. 这一结论对序半群也成立，即包含 0 元的可换正

则序半群 S 不包含非零的正幂零元. 事实上, 设 $a \in S, a \neq 0$ 且 $a^n = 0$. 显然 $n > 1$. 因为 S 为正则的, 存在 $x \in S$ 使得

$$a \leq axa = a^2x \leq (axa)xa = a^3x^2 \leq \cdots \leq a^nx^{n-1} = 0.$$

又 $a \geq 0$, 故 $a = 0$.

定理 3.5.6 设 S 为序半群, S 是正则的当且仅当对左理想 L_1, L_2, L, 理想 I 和双理想 B 有 $B \cap L_1 \cap L_2 \subseteq (BL_1L_2]$, 等价地, $B \cap I \cap L \subseteq (BIL]$.

证明 必要性 设 S 是正则的且 $a \in B \cap L_1 \cap L_2$, 则存在 $x \in S$ 使得

$$\begin{aligned} a \leq axa &\leq (axa)x(axa) = (axa)(xa)(xa) \\ &\in (BSB)(SL_1)(SL_2) \subseteq BL_1L_2. \end{aligned}$$

因此 $a \in (BL_1L_2]$.

充分性 设对 S 的任一双理想 B, 理想 I 和左理想 L 有

$$B \cap I \cap L \subseteq (BIL].$$

设 $a \in S$, 则

$$\begin{aligned} a &\in B(a) \cap I(a) \cap L(a) \subseteq (B(a)I(a)L(a)] \\ &\subseteq (B(a)SL(a)] \subseteq (B(a)L(a)] \\ &= ((a \cup aSa](a \cup Sa]] = ((a \cup aSa)(a \cup Sa)] \\ &\subseteq ((a \cup Sa)(a \cup Sa)] = (a^2 \cup aSa]. \end{aligned}$$

存在 $t \in a^2 \cup aSa$ 使得 $a \leq t$. 如果 $t = a^2$, 则

$$a \leq a^2 = a \cdot a \leq a^2a = aaa;$$

如果 $t \in aSa$, 则 $a \in (aSa]$, 故 S 为正则序半群. □

简化点，我们有

定理 3.5.7 一个序半群 S 是正则的当且仅当对 S 的每个双理想 B 和左理想 L, 有 $B\cap L\subseteq(BL]$.

证明 设 $a\in B\cap L$, 由 S 正则，则

$$a\le axa\le(axa)xa\in BSBSL\subseteq(BL],$$

因此 $B\cap L\subseteq(BL]$.

反之，因为

$$a\in B(a)\cap L(a)\subseteq(B(a)L(a)]=((a\cup aSa)(a\cup Sa)],$$

剩下类似定理 3.5.6 的证明，略去. □

本节最后，我们举两个例子.

例 3.5.8 设 $S=N$, 则 S 关于普通乘法和序关系是一个序半群，$\forall a\in S$, 因为 $a\le a^2$, 从而 $a\le aaa$, 因此 S 为正则的.

例 3.5.9 设 $S=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\}$, 则 S 关于普通乘法及大小关系构成序半群. $\forall x\in S$, 因为 $\frac{1}{2}>\frac{1}{2}x\frac{1}{2}=\frac{1}{4}x$, 因此 S 不是正则的.

§6 内禀正则序半群

本节讨论的内禀正则性到现在为止比正则性的研究有更丰富的内涵. 我们同时还刻画正则且内禀正则的序半群 [37−40].

我们回忆一下，序半群 S 称为内禀正则的，如果

$$(\forall a\in S)\ (\exists x,y\in S)\ a\le xa^2y,$$

等价地，$a\in(Sa^2S],\forall a\in S$ 或 $A\subseteq(SA^2S],\forall A\subseteq S$.

定理 3.6.1 一个序半群 S 是内禀正则的当且仅当 S 是单序半群的半格，等价地， S 为单序半群的并.

证明 必要性 设 S 是内禀正则的序半群， $\mathcal{N}$ 为 S 上的半格同余，要证 S 为单序半群的半格，我们仅需证 $\forall x \in S$, $(x)_{\mathcal{N}}$ 是 S 的单序子半群即可.

设 I 为 $(x)_{\mathcal{N}}$ 的理想，要证 $(x)_{\mathcal{N}}$ 是单序子半群，仅证

$$\forall y \in (x)_{\mathcal{N}}, \ \ ((x)_{\mathcal{N}} y (x)_{\mathcal{N}}] = (x)_{\mathcal{N}}$$

或证 $I = (x)_{\mathcal{N}}$. 设 $y \in (x)_{\mathcal{N}}, z \in I$, 则 $z \in (x)_{\mathcal{N}}$. 又根据定理 1.3.5,

$$\begin{aligned} t \in (z^5)_{\mathcal{N}} \ &\Rightarrow \ (t, z^5) \in \mathcal{N} \Rightarrow N(t) = N(z^5) \Rightarrow z^5 \in N(t) \\ &\Rightarrow \ t \in (Sz^5S] \subseteq (Sz^3S]. \end{aligned}$$

故 $(z^5)_{\mathcal{N}} \subseteq (Sz^3S]$. 因为 $y \in (x)_{\mathcal{N}} = (z)_{\mathcal{N}} = (z^5)_{\mathcal{N}}$, 所以 $y \in (Sz^3S]$, 即存在 $a, b \in S$ 使得 $y \le az^3b = (az)z(zb)$, 因为

$$\begin{aligned} az \in (az)_{\mathcal{N}} \ &= \ (a)_{\mathcal{N}}(z)_{\mathcal{N}} = (a)_{\mathcal{N}}(y)_{\mathcal{N}} \\ &= \ (a)_{\mathcal{N}}(yaz^3b)_{\mathcal{N}} = (yaz^3)_{\mathcal{N}} \\ &= \ (y)_{\mathcal{N}} = (x)_{\mathcal{N}}, \\ zb \in (zb)_{\mathcal{N}} \ &= \ (z)_{\mathcal{N}}(b)_{\mathcal{N}} = (y)_{\mathcal{N}}(b)_{\mathcal{N}} = (yaz^3b)_{\mathcal{N}}(b)_{\mathcal{N}} \\ &= \ (yaz^3b)_{\mathcal{N}} = (y)_{\mathcal{N}} = (x)_{\mathcal{N}}, \end{aligned}$$

所以 $az, zb \in (x)_{\mathcal{N}}$, 故 $y \le (az)z(zb) \in I$, 从而 $y \in I$.

充分性 设 $S = \bigcup\{S_\alpha \mid \alpha \in Y\}$, S_α 为 S 的单序子半群. 设 $x \in S$, 存在 $\alpha \in Y$ 使得 $x \in S_\alpha$. 又 $(Sx^2S] \cap S_\alpha$ 是 S_α 的理想. 因为 S_α 为单的，所以 $(Sx^2S] \cap S_\alpha = S_\alpha$. 又因为 $x \in S_\alpha$, 故 $x \in (Sx^2S]$. □

设 σ 为 S 上的半格同余，定义 S/σ 上的二元关系“$\preceq$”

$$(x)_\sigma \preceq (y)_\sigma \Longleftrightarrow (x)_\sigma = (xy)_\sigma,$$

则 $(S/\sigma,\cdot,\preceq)$ 是一个序半群. 如果 $(S/\sigma,\preceq)$ 是全序集, 称 S 为 σ 类的链.

引理 3.6.2 设 S 为序半群, S 是内禀正则的且 S 的所有理想关于集合的包含关系构成链当且仅当

$$(\forall x,y\in S)\ \ x\in(SxyS] \text{ 或 } y\in(SxyS].$$

证明 根据定理 1.1.8, 设 S 是内禀正则的且 S 的所有理想构成链, 则 S 的每个理想是素的. 因为 $(SxyS]$ 为 S 的理想且 $x^2y^2\in(SxyS]$, 所以 $x^2\in(SxyS]$ 或 $y^2\in(SxyS]$, 即 $x\in(SxyS]$ 或 $y\in(SxyS]$.

反之, 设 I 为 S 的任一理想, $a,b\in S$ 且 $ab\in I$. 由假设 $a\in(SabS]$ 或 $b\in(SabS]$, 从而 $a\in I$ 或 $b\in I$. 由定理 1.1.8, S 是内禀正则的且 S 的理想关于集合包含关系构成链. □

定理 3.6.3 一个序半群 S 是内禀正则的且 S 的理想集关于集合的包含关系构成链当且仅当 S 是单序半群的链.

证明 充分性 由假设, S 为单半群的半格, 即 $\forall x\in S$, $(x)_{\mathcal{N}}$ 为 S 的单序子半群. 设 $(x)_{\mathcal{N}},(y)_{\mathcal{N}}\in S/\mathcal{N}$. 由引理 3.6.2, $x\in(SxyS]$ 或 $y\in(SxyS]$. 设 $x\in(SxyS]$, 存在 $z,h\in S$ 使得 $x\leq zxyh$. 因为 $x\in N(x)$, 所以 $zxyh\in N(x)$, 从而 $xy\in N(x)$, 故 $N(xy)\subseteq N(x)$. 又 $x\in N(xy)$, 故 $N(x)\subseteq N(xy)$. 因此, $N(xy)=N(x)$, 即 $(x)_{\mathcal{N}}=(xy)_{\mathcal{N}}$, $(x)_{\mathcal{N}}\preceq(y)_{\mathcal{N}}$. 类似地, 设 $y\in(SxyS]$, 同上可证 $(y)_{\mathcal{N}}\preceq(x)_{\mathcal{N}}$.

必要性 设 σ 为 S 的半格同余, $\forall x\in S$, $(x)_\sigma$ 为单序子半群且 $(S/\sigma,\preceq)$ 是链. 由定理 1.1.8, 我们仅需证 S 的每个理想是素的. 设 I 为 S 的理想, $a,b\in S$ 且 $ab\in I$, 则 $(ab)_\sigma\cap I\neq\emptyset$ 且为 $(ab)_\sigma$ 的理想. 因为 $(ab)_\sigma$ 是单的, 所以 $(ab)_\sigma\cap I=(ab)_\sigma$, 即 $(ab)_\sigma\subseteq I$, 又 $(a)_\sigma\preceq(b)_\sigma$ 或 $(b)_\sigma\preceq(a)_\sigma$, 即 $(a)_\sigma=(ab)_\sigma$ 或 $(b)_\sigma\preceq(ab)_\sigma$, 因此 $a\in(a)_\sigma\subseteq I$ 或 $b\in(b)_\sigma\subseteq I$. □

下面我们来讨论内禀正则序半群的一些性质.

命题 3.6.4 设 S 为内禀正则序半群, 则下列各款成立:
1) $(\forall x, y \in S)\ \ (SxyS] = (SyxS]$;
2) 集 $\{(x)_{\mathcal{N}} \mid x \in S\}$ 和 S 的极大单序子半群集是一致的.

证明 1) 设 $x, y \in S$,

$$
\begin{aligned}
& xy \in (S(xy)^2S] = (SxyxyS] \subseteq (S^2yxS^2] \subseteq (SyxS] \\
\Rightarrow\ \ & SxyS \subseteq S(SyxS]S \subseteq (S^2yxS^2] \subseteq (SyxS] \\
\Rightarrow\ \ & (SxyS] \subseteq ((SyxS]] = (SyxS].
\end{aligned}
$$

对称地, $(SyxS] \subseteq (SxyS]$.

2) 设 $x \in S$, 由定理 3.6.1, $(x)_{\mathcal{N}}$ 为 S 的单序子半群. 设 T 为 S 的单序子半群且 $T \supseteq (x)_{\mathcal{N}}$, 设 $y \in T$, 因为 $(SxS] \cap T$ 为 T 的理想, 所以 $(SxS] \cap T = T$. 因此 $y \in (SxS]$. 由定理 1.1.8, $x \in N(y)$. 类似地, 因为 $(SyS] \cap T$ 为 T 的理想, 所以 $x \in T \subseteq (SyS]$, 因此 $y \in N(x)$. 故 $y \in (x)_{\mathcal{N}}$. 反之, 设 T 为 S 的极大单序子半群, 设 $x \in T$, 类似以上证明可证 $T \subseteq (x)_{\mathcal{N}}$. 从而 $T = (x)_{\mathcal{N}}$. □

命题 3.6.5 内禀正则序半群可以惟一地分解为单序子半群的完全半格. 一般情况下, 它的单序半群半格分解是不惟一的.

证明 设 S 为序半群, σ 是 S 上的完全半格同余, 使得 $\forall x \in S, (x)_\sigma$ 是 S 的单序子半群. 由定理 2.1.7, $\mathcal{N} \subseteq \sigma$. 又设 $(a,b) \in \sigma$, 因为 $(b)_\sigma$ 为 S 的序子半群且 $a \in (b)_\sigma$, 所以 $(b)_\sigma \cap I(a) \neq \emptyset$. 因为 $I(a) \cap (b)_\sigma$ 为 $(b)_\sigma$ 的理想, 故 $I(a) \cap (b)_\sigma = (b)_\sigma$, 因此 $b \in I(a)$. 对称地, 我们可证 $a \in I(b)$. 综上所证, 我们有 $I(a) = I(b)$, 即 $(a,b) \in \mathcal{J}$. 由推论 1.3.6, $(a,b) \in \mathcal{J} = \mathcal{N}$, 故 $\sigma \subseteq \mathcal{N}$, 从而 $\sigma = \mathcal{N}$.

该命题证明的其余部分我们仅需给出一个反例就可以了.

例 3.6.6 设 $S=\{a,b,c,d,e\}$, 其上的乘法运算和二元关系定义如下:

$\cdot$	a	b	c	d	e
a	b	b	a	b	b
b	b	b	b	b	b
c	a	b	c	b	e
d	b	b	b	d	b
e	e	e	e	e	e

$$\leq:=\{(a,a),(a,e),(b,b),(b,e),(c,c),(d,b),(d,d),(d,e),(e,e)\}.$$

则 $(S,\cdot,\leq)$ 是一个序半群且 S 为内禀正则的, 因为 $(\forall a\in S)$ $(\exists x,y\in S)\quad a\leq xa^2y$. S 上的半格同余

$$\begin{aligned}\mathcal{N} &= \{(a,a),(a,b),(a,d),(a,e),(b,a),(b,b),(b,d),(b,e),\\ &\quad (c,c),(d,a),(d,b),(d,d),(d,e),(e,a),(e,b),\\ &\quad (e,d),(e,e)\}.\end{aligned}$$

S 上的二元关系

$$\begin{aligned}\sigma &= \{(a,a),(a,b),(a,e),(b,a),(b,b),(b,e),(c,c),\\ &\quad (d,d),(e,a),(e,b),(e,e)\}\end{aligned}$$

为 S 的半格同余, $\sigma\neq\mathcal{N}$, 且 $(x)_\sigma=\{a,b,e\}$ 或 $\{c\}$ 或 $\{d\}$ 为 S 的单序子半群. □

我们再给出一个非内禀正则序半群的例子.

例 3.6.7 设 $S=\{a,b,c,d,f\}$, 其上的乘法运算和二元关系定义如下:

·	a	b	c	d	f
a	a	b	c	d	c
b	a	b	c	d	a
c	a	b	c	d	c
d	d	d	d	d	d
f	a	b	c	d	c

$$\begin{aligned}\leq: \ = \ & \{(a,a),(a,d),(b,b),(b,d),(c,a),(c,c),(c,d),\\ & (c,f),(d,d),(f,f)\}.\end{aligned}$$

则 $(S,\cdot,\leq)$ 是一个序半群，但 S 不是内禀正则的，因为 $\forall x,y \in S, f \not\leq xf^2y$.

本节的最后，我们刻画一个序半群既是正则又是内禀正则的特征.

定理 3.6.8 一个序半群 S 既是正则又是内禀正则的当且仅当

$$B\cap L \subseteq (BLB] \quad (B\cap R \subseteq (BRB]),$$

这里 B, L 和 R 是 S 的任意双理想、左理想和右理想.

证明 必要性 设 B 为 S 的双理想，L 为 S 的左理想，$a \in B\cap L$. 因为 S 为正则，存在 $x \in S$ 使得 $a \leq axa$; 又 S 内禀正则，存在 $y, z \in S$ 使得 $a \leq ya^2z$, 则我们有

$$\begin{aligned} a \leq axa \ & \leq \ (axa)x(axa) \leq axax(ya^2z)xa \\ & = \ (axa)(xya)(azxa) \\ & \in \ (BSB)(SL)(BSB) \subseteq BLB, \end{aligned}$$

因此 $a \in (BLB]$. 如果 R 为 S 的右理想且 $a \in B\cap R$, 则

$$\begin{aligned} a \leq axa \ & \leq \ (axa)x(axa) \leq ax(ya^2z)xaxa \\ & = \ (axya)(azx)(axa) \\ & \in \ (BSB)(RS)(BSB) \subseteq BRB, \end{aligned}$$

因此 $a \in (BRB]$.

充分性　设 $a \in S$, 则

$$\begin{aligned} a \in B(a) &= B(a) \cap S \subseteq (B(a)SB(a)] \\ &= ((a \cup aSa]S(a \cup aSa]] \\ &= (aSa], \end{aligned}$$

故 S 为正则的.

我们考察 $R(a)$ 和 $L(a)$, 因为 $R(a)$ 也为双理想, 由假设

$$\begin{aligned} a &\in R(a) \cap L(a) \subseteq (R(a)L(a)R(a)] \\ &\subseteq (SL(a)R(a)] \subseteq (L(a)R(a)] \\ &= ((a \cup Sa](a \cup aS]] = (a^2 \cup Sa^2 \cup a^2S \cup Sa^2S]. \end{aligned}$$

则 $a \leq t, t \in a^2 \cup Sa^2 \cup a^2S \cup Sa^2S$. 如果 $t = a^2$, 显然 $a \leq a^2 \leq aa^2a \in Sa^2S$, 从而 $a \in (Sa^2S]$; 如果 $t \in Sa^2$, 则 $a \in (Sa^2] \subseteq (S(Sa^2]a] \subseteq (Sa^2S]$; 如果 $t \in a^2S$, 同理有 $a \in (Sa^2S]$; 如果 $t \in Sa^2S$, 显然有 $a \in (Sa^2S]$. 故 S 为内禀正则的.

现在假设 $R \cap B \subseteq (BRB]$, 则

$$a \in B(a) = S \cap B(a) \subseteq (B(a)SB(a)],$$

S 是正则的. 又 $L(a)$ 为双理想, 同上情形,

$$a \in R(a) \cap L(a) \subseteq (L(a)R(a)L(a)] \subseteq (L(a)R(a)],$$

可导出 S 是内禀正则的. □

定理 3.6.9　设 S 为序半群, B, Q, L 和 R 分别为 S 的双理想、拟理想、左理想和右理想. 则下列各款是等价的:

1) S 是正则和内禀正则的;

2) $B\cap Q\subseteq (BQB]$;
3) $B\cap L\subseteq (BLB]$;
4) $B\cap R\subseteq (BRB]$;
5) $B\cap Q\subseteq (QBQ]$;
6) $L\cap Q\subseteq (QLQ]$;
7) $R\cap Q\subseteq (QRQ]$.

证明 1) $\Longrightarrow$ 2) 和 5) 设 S 是正则和内禀正则的, $a\in B\cap Q$, 存在 $x,y,z\in S$ 使得 $a\le axa, a\le ya^2z$. 则

$$\begin{aligned} a &\le (axa)x(axa)\le ax(ya^2z)x(ya^2z)x \\ &\le (axya)(azxya)(azxa) \\ &\in (BSB)(QS\cap SQ)(BSB)\subseteq BQB, \end{aligned}$$

又从

$$\begin{aligned} a &\le (axya)(azxya)(azxa) \\ &\in (QS\cap SQ)(BSB)(QS\cap SQ)\subseteq QBQ \end{aligned}$$

可推出 $a\in (BQB], a\in (QBQ]$.

6) $\Longrightarrow$ 1) $\forall a\in S$, 则

$$\begin{aligned} a &\in Q(a)=S\cap Q(a)\subseteq (Q(a)SQ(a)]=(aSa], \\ a &\in L(a)\cap R(a)\subseteq (R(a)L(a)R(a)]=(Sa^2S]. \end{aligned}$$

该定理的其他证明可类似以上证明过程给出, 这里略去. □

通过以上的证明, 该节的有关定理中, B,R,L,Q 和 I 均可以用 $B(a),R(a),L(a),Q(a)$ 和 $I(a)$ 来替代.

§7 单序半群的半格

上节我们知道, 一个序半群 S 是单序半群的半格当且仅当 S 是内禀正则的. 本节给出单序半群半格的详细阐述, 同时考虑 poe

半群的有关情况，更主要地，我们准备把单序半群半格推广到 ξ_n 单序半群的半格.

定理 3.7.1 设 S 为序半群，则下列各款是等价的：

(1) S 是单序半群的半格；

(2) S 的每个理想是半素的；

(3) $(\forall x, y \in S)\ \ I(xy) = I(x) \cap I(y)$;

(4) $(\forall x \in S)\ \ x \in I(x^2)$;

(5) S 是内禀正则的；

(6) $\mathcal{N} = \mathcal{J}$;

(7) $(\forall x \in S)\ \ N(x) = \{y \in S \mid x \in SyS\}$;

(8) 对 S 的每个理想 I, $I = \bigcup\{(x)_{\mathcal{N}} \mid x \in I\}$;

(9) $(\forall x \in S)\ \ (x)_{\mathcal{N}}$ 是 S 的单序子半群.

证明 根据上节的定理 3.6.1 以及以前的定理 1.3.5, 推论 1.3.6 及其证明，我们有 (1) $\Leftrightarrow$ (5)$\Leftrightarrow$ (6)$\Leftrightarrow$ (7) $\Leftrightarrow$ (9).

(5)$\Longrightarrow$ (2) 设 I 为 S 的理想且 $x^2 \in I$. 因为 S 是内禀正则的，则 $x \in (Sx^2S] \subseteq I$, 即 $x \in I$.

(2) $\Longrightarrow$ (3) 见定理 1.1.8 的证明.

(3)$\Longrightarrow$ (4) 显然.

(4)$\Longrightarrow$ (5) 设 $x \in S$, 因为 $x \in I(x^2)$, 所以

$$x \in (x^2 \cup Sx^2 \cup x^2S \cup Sx^2S].$$

存在 $t \in x^2 \cup Sx^2 \cup x^2S \cup Sx^2S$ 使得 $x \leq t$. 当 $t = x^2$, 则 $x \leq x^2 \leq x^4 \in Sx^2S$, 因此 $x \in (Sx^2S]$; 当 $t \in Sx^2$, 则 $x \in (Sx^2] \subseteq (S(Sx^2](Sx^2]] \subseteq (Sx^2S]$; 同理当 $t \in x^2S$ 时也有 $x \in (Sx^2S]$; 显然 $t \in Sx^2S$, 有 $x \in (Sx^2S]$.

(6)$\Longrightarrow$(8) 设 I 为 S 的理想，显然

$$I \subseteq \bigcup\{(x)_{\mathcal{N}} \mid x \in I\},\ \ \forall y \in \bigcup\{(x)_{\mathcal{N}} \mid x \in I\},$$

则存在 $x \in I$ 使得 $y \in (x)_{\mathcal{N}}$. 因为 $\mathcal{N} = \mathcal{J}$, 由 $(x)_{\mathcal{N}} = (y)_{\mathcal{N}}$, 得 $I(x) = I(y)$, 从而 $y \in I(x) \subseteq I$.

(8) $\Longrightarrow$ (6) 因为 $I=\bigcup\{(x)_{\mathcal{N}}\mid x\in I\}$, 设 $z^2\in I$, 存在 $x\in I$ 使得 $z^2\in(x)_{\mathcal{N}}$, 因此 $(x)_{\mathcal{N}}=(z^2)_{\mathcal{N}}=(z)_{\mathcal{N}}$. 故 $z\in(x)_{\mathcal{N}}\subseteq I$. 由此得出 I 为半素的. 因为 (6) 和 (2) 等价, 所以 (8) $\Longrightarrow$ (6) 成立. □

推论 3.7.2 设 S 为 poe 半群, 则 S 是单序半群的半格当且仅当 $(\forall x\in S)$ exe 是 $(x)_{\mathcal{N}}$ 中的最大元.

证明 必要性 $\forall x\in S, e\in N(x)$, 从而 $exe\in N(x)$, 又 $x\in N(exe)$, 故 $exe\in(x)_{\mathcal{N}}$. 由定理 3.7.1,

$$N(x)=\{y\in S\mid x\in(SyS]\}=\{y\in S\mid x\le eye\}.$$

$\forall y\in(x)_{\mathcal{N}}$, 则 $x\in N(y)$, 因此 $y\le exe$.

充分性 设 $(a,b)\in\mathcal{N}$, 因为 $a\in(a)_{\mathcal{N}}=(b)_{\mathcal{N}}$ 且 ebe 是 $(b)_{\mathcal{N}}$ 的最大元, 则 $a\le ebe$, 从而 $a\in I(b)$. 对称地, 从 $b\in(a)_{\mathcal{N}}$ 我们得出 $b\in I(a)$. 由 $I(a)\subseteq I(b)$ 和 $I(b)\subseteq I(a)$ 我们得出 $(a,b)\in\mathcal{J}$. 反之, 设 $(a,b)\in\mathcal{J}$, 则 $a\in I(b)$ 且 $b\in I(a)$. 由 $a\in I(b)$ 得出 $a\le b$ 或 $a\le eb$ 或 $a\le be$ 或 $a\le ebe$. 因为 $a\in N(a)$, 所以 $b\in N(a)$. 由 $b\in I(a)$ 同理推出 $a\in N(b)$. 因此 $(a,b)\in\mathcal{N}$, 即 $\mathcal{N}=\mathcal{J}$. 由定理 3.7.1, S 为单序半群的半格.

□

推论 3.7.3 一个 poe 半群是内禀正则的当且仅当 $\forall x\in S$, $(x)_{\mathcal{N}}$ 是 S 的内禀正则 poe 子半群.

证明 必要性 由定理 3.7.1 及推论 3.7.2, $\forall x\in S$, exe 为 $(x)_{\mathcal{N}}$ 的最大元, $\forall y\in(x)_{\mathcal{N}}$,

$$\begin{aligned} y &\le ey^2e\le e(ey^2e)(ey^2e)e\le ey^2ey^2e\le ey(ey^2e)ey^2e\\ &\le eyey^2eye\le e(exe)ey^2e(exe)e\le(exe)y^2(exe). \end{aligned}$$

所以 $(x)_{\mathcal{N}}$ 是内禀正则的.

充分性　设 $x \in S$ f 是 $(x)_{\mathcal{N}}$ 的最大元，因为 $x \in (x)_{\mathcal{N}}$ 且 $(x)_{\mathcal{N}}$ 是内禀正则的，我们有

$$x \leq fx^2f \leq ex^2e,$$

则 $x \in (Sx^2S]$. □

推论 3.7.4　设 S 为 poe 半群，则 S 是单序半群的半格当且仅当 S 是单的 poe 半群的半格.

下面我们将单序半群的概念进一步推广. 设 S 为序半群，$a \in S$, 记

$$J_n(a) = \{x \in S \mid (a, x) \in \eta^n\}, n \in \mathbf{Z}^+.$$

我们定义 S 上的二元关系

$$\xi_n : (a, b) \in \xi_n \Longleftrightarrow J_n(a) = J_n(b).$$

我们有下面结论.

引理 3.7.5　设 S 是序半群，$n \in \mathbf{Z}^+$, 则下列各款成立：

(1) ξ_n 是 S 上的等价关系；

(2) $\xi_n \subseteq \eta^n \cap (\eta^n)^{-1}$;

(3) $\mathcal{J} = \tau \cap \tau^{-1} \subseteq \xi_1 \subseteq \xi_2 \subseteq \cdots \subseteq \xi_n \subseteq \xi_{n+1} \subseteq \cdots \xi = \mathcal{N}$.

证明　(1) 和 (2) 显然，我们仅证明 (3). 设 $a, b \in S$ 且 $(a, b) \in \mathcal{J}$, 则 $I(a) = I(b)$, 存在 $x, y, u, v \in S^1$ 使得 $a \leq ubv$, $b \leq xay$. 设 $c \in J_1(a)$, 则 $(a, c) \in \eta$, 即存在 $k \in \mathbf{Z}^+$, $s, t \in S$ 使得 $c^k \leq sat$, 因此

$$c^k \leq s(ubv)t = (su)b(vt),$$

故 $(b, c) \in \eta$, 即 $c \in J_1(b)$, 从而 $J_1(a) \subseteq J_1(b)$. 对称地，我们可证 $J_1(b) \subseteq J_1(a)$, 因此 $(a, b) \in \xi_1$, 即 $\mathcal{J} \subseteq \xi_1$.

设 $(a,b)\in\xi_n$, 即 $J_n(a)=J_n(b)$. 设 $x\in J_{n+1}(a)$, 则 $(a,x)\in\eta^{n+1}$, 即存在 $z\in S$ 使得 $(a,z)\in\eta^n$, $(z,x)\in\eta$. 由 $(a,z)\in\eta^n$ 可得 $z\in J_n(a)=J_n(b)$, 即$(b,z)\in\eta^n$. 又$(z,x)\in\eta$, 故 $(b,x)\in\eta^{n+1}$. 我们有 $x\in J_{n+1}(b)$, $J_{n+1}(a)\subseteq J_{n+1}(b)$ 成立. 对称地我们有 $J_{n+1}(b)\subseteq J_{n+1}(a)$, 因此 $\xi_n\subseteq\xi_{n+1}$. 设 $(a,b)\in\xi_n$, 则 $a\in J_n(b)$, $b\in J_n(a)$, 即 $(a,b)\in\eta^n\cap(\eta^n)^{-1}$, 因此由推论 3.1.7,

$$\xi_n\subseteq\eta^n\cap(\eta^n)^{-1}\subseteq(\bigcup_{k\in Z^+}\eta^k)^{-1}=\xi=\mathcal{N}.$$

□

一个序半群 S 称为 ξ_n 单的, 如果 $\xi_n=S\times S$. 特别地, S 为 $\mathcal{J}$ 单的当且仅当 S 为单序半群. 当 $n=1$ 时, S 为 ξ_1 单的当且仅当 S 为阿基米德序半群. 这两类序半群的半格我们在前面均有论及. 下面我们刻画 ξ_n 单序半群的半格.

定理 3.7.6 设 S 为序半群且 $n\in\mathbf{Z}^+$, 则下列命题是等价的:

(1) S 是 ξ_n 单序半群的完全半格;

(2) $(\forall a,b\in S)\ \ (a,b)\in\eta^n\Rightarrow(a^2,b)\in\eta^n$;

(3) η^n 为 S 的拟序;

(4) $(\forall a\in S)\ \ J_n(a)$ 为 S 的理想;

(5) $(\forall a,b\in S)\ \ J_n(ab)=J_n(a)\cap J_n(b)$;

(6) $(\forall a,b,c\in S)\ \ (a,c)\in\eta^n,(b,c)\in\eta^n\Rightarrow(ab,c)\in\eta^n$;

(7) S 的每个 ξ_n 类为 S 的子序半群;

(8) $(\forall a\in S)\ \ (a,a^2)\in\xi_n$;

(9) $(\forall a\in S)\ \ N(a)=\{x\in S\mid(x,a)\in\eta^n\}$;

(10) $\xi_n=\eta^n\cap(\eta^n)^{-1}$ 是 S 的惟一的使得每个 ξ_n 类均为 ξ_n 单半群的完全半格同余.

证明 (1)$\Longrightarrow$(2) 设 S 为 ξ_n 单序半群 S_α 的完全半格 Y, 即 $S=\bigcup_{\alpha\in Y}S_\alpha$. 设 $a,b\in S$ 使得 $(a,b)\in\eta^n$. 存在 $\alpha,\beta\in Y$

使得 $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$. 由引理 3.1.5, 我们有 $\beta \le \alpha$. 事实上，存在

$$a_1 \in S_{\alpha_1},\ a_2 \in S_{\alpha_2},\ \cdots, a_{n-1} \in S_{\alpha_{n-1}}$$

使得

$$(a, a_1) \in \eta,\ (a_1, a_2) \in \eta,\ \cdots, (a_{n-1}, b) \in \eta.$$

由引理 3.1.5,

$$\beta \le \alpha_{n-1} \le \alpha_{n-2} \le \cdots \le \alpha_1 \le \alpha,$$

从而 $\beta \le \alpha$, 则 $\beta = \alpha\beta$, 因此 $a^2b \in S_\beta$. 因为 S_β 为 ξ_n 单的，我们有 $b \in J_n(b) = J_n(a^2b)$ 在 S_β 中成立，因此在 S 中 $(a^2b, b) \in \eta^n$. 因为 $(a^2b, c) \in \eta, c \in S$, 必有 $(a^2, c) \in \eta$, 故 $(a^2b, b) \in \eta^n$ 得出 $(a^2, b) \in \eta^n$.

(2)$\Longrightarrow$(3) 要证 η^n 是拟序，仅需证 η^n 是传递的. 设 $(a, b) \in \eta^{n+1}$ ，存在 $c \in S$ 使得 $(a, c) \in \eta$, $(c, b) \in \eta^n$. 由假设，因为 $(c, b) \in \eta^n$, 从而有 $(c^k, b) \in \eta^n, \forall k \in \mathbf{Z}^+$. 事实上， $\forall k \in \mathbf{Z}^+$, 存在 $m \in \mathbf{Z}^+$ 使得 $2^m \le k < 2^{m+1}$, 因为 $(c^{2^{m+1}}, b) \in \eta^n$, 即 $(c^k \cdot c^{2^{m+1}-k}, b) \in \eta^n$, 由 (1)$\Longrightarrow$(2) 的证明， $(c^k, b) \in \eta^n$. 又因为 $(a, c) \in \eta$, 存在 $k \in \mathbf{Z}^+$ 使得 $c^k \in (SaS]$. 由 $(c^k, b) \in \eta^n$, 当 $n = 1$ 时，存在 $m \in \mathbf{Z}^+$ 使得 $b^m \in (Sc^kS] \subseteq (SaS]$, 从而 $(a, b) \in \eta$, 即 $\eta^2 \subseteq \eta$. 当 $n > 1$ 时，存在 $d \in S$ 使得 $(c^k, d) \in \eta$, $(d, b) \in \eta^{n-1}$, 类似上述证明，我们有 $(a, d) \in \eta$, 因此 $(a, b) \in \eta^n$, 即 $\eta^{n+1} \subseteq \eta^n$, 因此 $(\eta^n)^2 \subseteq \eta^n$, 证得 η^n 是可传递的.

(3)$\Longrightarrow$(4) 如果 η^n 为拟序，则 η^n 是可传递的. $\forall k \in \mathbf{Z}^+$ 且 $k \ge n$, 则存在 $m \in \mathbf{Z}^+$ 使得 $(m-1)n \le k < mn$, $\eta^k = \eta^{(m-1)n} \cdot \eta^{k-(m-1)n} \subseteq \eta^{(m-1)n} \cdot \eta^n$, 因为 $k - (m-1)n < n$. 因此 $\rho = \bigcup_{k \in Z^+} \eta^k = \eta^n$. 由定理 3.1.8

$$\begin{aligned} J_n(a) &= \{x \in S \mid (a, x) \in \rho\} = \{x \in S \mid (a, x) \in \eta^n\} \\ &= M(a). \end{aligned}$$

(4)$\Longrightarrow$(5) 设 $a \in S$, 因为 $\eta^n \subseteq \rho$, 故 $J_n(a) \subseteq M(a)$. 又设 $x \in S$ 且 $x^2 \in J_n(a)$, 即 $(a, x^2) \in \eta^n$. 如果 $n = 1$, 即 $(a, x^2) \in \eta$, 因此 $(a, x) \in \eta$. 由 $J_n(a)$ 的定义, $x \in J_n(a)$. 如果 $n > 1$, 存在 $c \in S$ 使得 $(a, c) \in \eta^{n-1}$, $(c, x^2) \in \eta$. 由 $(c, x^2) \in \eta$, 同上证明我们有 $(c, x) \in \eta$, 因此 $(a, x) \in \eta^n$, 也即 $x \in J_n(a)$. 综上所述 $J_n(a)$ 是半素的, 又由假设 $J_n(a)$ 是半素理想. 根据 $M(a)$ 的极小性得 $J_n(a) = M(a)$. 由定理 3.1.8 得 $J_n(ab) = J_n(a) \cap J_n(b)$.

(5)$\Longrightarrow$(6), (6) $\Longrightarrow$(7) 及 (7)$\Longrightarrow$(8) 均为显然的.

(8)$\Longrightarrow$ (2) 设 $(a, b) \in \eta^n$, 则 $b \in J_n(a)$. 因为 $(a, a^2) \in \xi_n$, 所以 $b \in J_n(a^2)$, 即 $(a^2, b) \in \eta^n$.

根据上面的证明, 我们已经有 (2) 至 (8) 是等价的.

(3)$\Longrightarrow$(9) 由 η^n 是传递的, 则 $\rho = \eta^n$. 根据定理 3.1.6

$$N(a) = \{x \in S \mid (x, a) \in \rho\} = \{x \in S \mid (x, a) \in \eta^n\}.$$

(9)$\Longrightarrow$(10) 由引理 3.7.5, 我们有

$$\xi_n \subseteq \eta^n \cap (\eta^n)^{-1} \subseteq \rho \cap \rho^{-1} = \xi = \mathcal{N}.$$

另一方面, 设 $(a, b) \in \mathcal{N}$, 则 $N(a) = N(b)$. 设 $x \in J_n(a)$, 则 $(a, x) \in \eta^n$. 由假设 $a \in N(x)$, 所以 $b \in N(b) = N(a) \subseteq N(x)$, 即 $(b, x) \in \eta^n$, $x \in J_n(b)$. 因此 $J_n(a) \subseteq J_n(b)$. 类似地我们可以得出 $J_n(b) \subseteq J_n(a)$, 故 $(a, b) \in \xi_n$. 又由 $\xi_n \subseteq \mathcal{N}$ 可证 $\mathcal{N} = \xi_n$.

前章已证 $\mathcal{N}$ 是最小的完全半格同余. 设 A 为 ξ_n 同余类, 设 $\overline{\xi_n}$ 为 A 上二元关系, 定义如下:

$$(\forall a, b \in A) \ \ (a, b) \in \overline{\xi_n} \Longleftrightarrow \overline{J_n}(a) = \overline{J_n}(b),$$

这里 $\overline{J_n}(x) = \{y \in A \mid (x, y) \in \overline{\eta}^n\}$, 且

$$\overline{\eta} = \{(x, y) \in A \times A \mid y^m \leq uxv, m \in \mathbf{Z}^+, u, v \in A\}.$$

设 $\forall(a,b)\in A\times A$, 则 $(a,b)\in\xi_n$, 即 $J_n(a)=J_n(b)$. 由引理 3.1.5 , $\overline{J_n}(x)=J_n(x), \forall x\in A$. 故 $(a,b)\in\overline{\xi_n}$, 因此 $\overline{\xi_n}=S\times S$.

设 π 为完全半格同余且 S 的每个 π 类是 $\overline{\xi_n}$ 单的. 设 $(a,b)\in\pi$, A 为 π 类且 $a,b\in A$. 在 A 中 $(a,b)\in\overline{\xi_n}$, 即 $(a,b)\in\overline{\eta}^n$, $(b,a)\in\overline{\eta}^n$ 在 A 中成立. 因此在 S 中也有以上类似结论成立, 即 $(a,b)\in\eta^n$, $(b,a)\in\eta^n$. 我们有 $(a,b)\in\eta^n\cap(\eta^n)^{-1}=\xi_n$, 故 $\pi=\xi_n$.

(10)$\Longrightarrow$(1) 显然.

§8 序半群的完全正则性

一个半群 S 如果是正则的, 同时也为左正则和右正则的, 称 S 是完全正则的. 等价地, $(\forall a\in S)$ $(\exists x\in S)$ $a=axa, ax=xa$. 当我们将这一概念推广到序半群 S 时 [41,42], 就产生了二个概念: 完全正则性与强正则性. 称一个序半群 S 是完全正则的, 如果 S 是正则的, 且为左正则和右正则的. S 称为是强正则的, 如果 $(\forall a\in S)$ $(\exists x\in S)$ $a\le axa, ax=xa$. 本节我们主要讨论序半群的完全正则性、强正则性和拟完全正则性.

我们已经知道, 一个序半群 S 的子半群 T 为正则的如果 $a\in(aTa], \forall a\in T$; T 为左 (右) 正则的如果

$$a\in(Ta^2]\ (a\in(a^2T]),\ \forall a\in T;$$

T 为内禀正则的如果 $a\in(Ta^2T]$, $\forall a\in T$. T 称为是拟完全正则的如果 $a\in(aTaT]$ 或 $a\in(TaTa]$, $\forall a\in T$. 不难看出 T 如果是正则的 (左正则、右正则), 必有 T 是拟完全正则的.

例 3.8.1 设 $S=\{a,b,c,d,f\}$, 其上的乘法运算和二元关系定义如下:

·	a	b	c	d	f
a	a	b	c	c	c
b	a	b	c	c	c
c	a	b	c	c	c
d	a	b	c	f	d
f	a	b	c	d	f

$$\begin{aligned}\leq: \ = \ &\{(a,a),(a,c),(a,d),(a,f),(b,b),(b,c),(b,d),\\ &(b,f),(c,c),(c,d),(c,f),(d,d),(f,f)\}.\end{aligned}$$

则 $(S,\cdot,\leq)$ 是一个序半群. $\forall x \in S$, $x \in xS$. 又当 $x \neq d$ 时, $x = x^2 \in xSxS, x \in (xSxS]$. 当 $x = d$ 时, $dS = S$, $dSdS = S^2 = S$, 故 $d \in (dSdS]$. 由上推导得出 S 是拟完全正则的.

定理 3.8.2 设 S 为序半群, 则下列各款是等价的:

1) S 是完全正则的;

2) $(\forall a \in S)\ \ a \in (a^2Sa^2]$;

3) S 的每个拟理想是完全正则半群;

4) S 的每个双理想是半素的.

证明 1)$\Longrightarrow$2) 设 S 为完全正则的, 则 S 为正则的、左正则和右正则的, 即

$$(\forall a \in S)\ a \in (aSa] \subseteq ((a^2S]S(Sa^2]] \subseteq (a^2Sa^2].$$

2)$\Longrightarrow$3) 设 Q 为 S 的拟理想, 因为

$$Q^2 \subseteq QS \cap SQ \subseteq Q,$$

所以 Q 为 S 的子半群. $\forall a \in Q$, 因为 $aSa \subseteq Q$, 由假设,

$$a \in (a^2Sa^2] \subseteq (a(aSa]a] \subseteq (aQa].$$

又因为

$$a^2Sa^2Sa = a(aSa)(aSa) \subseteq QQQ \subseteq Q,$$

$$aSa^2Sa^2 = (aSa)(aSa)a \subseteq QQQ \subseteq Q,$$

所以

$$a \in (a^2Sa^2] \subseteq (a^2S(a^2Sa^2]a] \subseteq ((a^2Sa^2Sa)a^2] \subseteq (Qa^2],$$

$$a \in (a^2Sa^2] \subseteq (a(a^2Sa^2]Sa^2] \subseteq (a^2(aSa^2Sa^2)].$$

因此 Q 是正则、左正则和右正则的.

3)$\Longrightarrow$4) 因为 S 是 S 的拟理想，所以 S 为完全正则的. 设 B 为 S 的双理想且 $a^2 \in B$，则

$$a \in (aSa] \subseteq ((a^2S]S(Sa^2]] \subseteq (a^2Sa^2].$$

因为 $(a^2Sa^2] \subseteq (BSB] \subseteq B$，所以 $a \in B$.

4)$\Longrightarrow$2) 设 $a \in S$，$(a^2Sa^2]$ 是 S 的双理想，因为 $(a^4)^2 \in (a^2Sa^2]$，必有 $a^4 \in (a^2Sa^2]$. 因为双理想是半素的，由此得出 $a \in (a^2Sa^2]$.

2)$\Longrightarrow$ 1) 由 $a \in (a^2Sa^2]$，显然得出 $a \in (aSa]$，$a \in (a^2S]$ 和 $a \in (Sa^2]$. □

定理 3.8.3 一个序半群是拟完全正则的当且仅当 S 的每个理想是拟完全正则的.

证明 设 I 是 S 的理想，$\forall a \in I$，则

$$\begin{aligned} a \in (aSaS] &\subseteq ((aSaS]S(aSaS]S]] \subseteq (a(SaS]a(SaS]] \\ &\subseteq (aIaI], \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} a \in (SaSa] &\subseteq (S(aSaS]S(aSaS]] \subseteq ((SaS]a(SaS]a] \\ &\subseteq (IaIa]. \end{aligned}$$

因此 I 是拟完全正则的.

反之是显然的. □

从上定理我们看出拟完全正则对理想有遗传性, 完全正则性对拟理想有遗传性. 我们不难看出正则性 (左正则性、右正则性) 对理想 (左理想、右理想) 均有遗传性.

定理 3.8.4 设 S 为序半群, 则下列各款是等价的:

1) S 是强正则的;

2) $(\forall a \in S)\ (\exists y \in S)\quad a \leq aya, y \leq yay, ay = ya$;

3) S 的每个 $\mathcal{N}$ 类是强正则的;

4) S 的每个左理想 L 和右理想 R 是半素的, 且 $(LR]$ 是 S 的强正则子半群;

5) S 是左正则、右正则且 $(SaS]$ 是 S 的强正则子半群, $\forall a \in S$;

6) $(\forall a \in S)\ (\exists e_a \in Sa^2S)\quad e_a \leq e_a^2, a \leq e_a a, a \leq a e_a$ 且 $(Se_aS]$ 是 S 的强正则子半群;

7) $(\forall a \in S)\ (\exists e_a \in Sa^2S)\quad a \leq e_a a, a \leq a e_a$ 且 $(Se_aS]$ 是 S 的强正则子半群;

8) $(\forall a \in S)\quad a \in (Sa] \cap (aS]$ 且 $(SaS]$ 是 S 的强正则子半群.

证明 1) $\Longrightarrow$ 2) 设 $a \in S$, 存在 $x \in S$ 使得 $a \leq axa$ 且 $ax = xa$. 那么 $a \leq axa \leq (axa)xa = a(xax)a$. 记 $y = xax$, 我们有

$$a \leq aya;$$
$$y = xax \leq x(axa)x = (xax)ax = yax \leq y(axa)x = yay;$$
$$ay = a(xax) = (xa)(xa) = (xax)a = ya.$$

2)$\Longrightarrow$3) 设 $b \in S$, 因为 $\mathcal{N}$ 为 S 上的半格同余. 设 $a \in (b)_{\mathcal{N}}$, 由 2) 存在 $x \in S$ 使得 $a \leq axa$, $x \leq xax$ 且 $ax = xa$. 因为

$a \in N(a)$, 所以 $axa \in N(a)$, $x \in N(a)$ 和 $N(x) \subseteq N(a)$. 又 $xax \geq x$, 所以 $xax \in N(x)$, $a \in N(x)$ 和 $N(a) \subseteq N(x)$, 因此 $x \in (x)_{\mathcal{N}} = (a)_{\mathcal{N}} = (b)_{\mathcal{N}}$.

3)$\Longrightarrow$4) 设 L 为 S 的左理想, $a^2 \in L$. 因为 $a \in (a)_{\mathcal{N}}$ 且 $(a)_{\mathcal{N}}$ 是强正则的, 存在 $x \in (a)_{\mathcal{N}}$ 使得 $a \leq axa$ 且 $xa = ax$. 因此我们有

$$a \leq (ax)a = (xa)a = xa^2 \in SL \subseteq L \Rightarrow a \in L.$$

同理可证 S 的任一右理想 R 是半素的. 设 $a, b \in (LR]$, 则存在 $y_1, y_2 \in L$, $x_1, x_2 \in R$ 使得 $a \leq y_1x_1, b \leq y_2x_2$. 因此 $ab \leq y_1x_1y_2x_2$. 因为 $(y_1x_1)y_2 \in L$, 所以 $ab \in (LR]$.

设 $a \in (LR]$, 则存在 $x \in (LR]$ 使得 $a \leq axa, xa = ax$. 事实上, 设 $a \in (a)_{\mathcal{N}}$, 因为 $(a)_{\mathcal{N}}$ 是强正则的, 存在 $t \in (a)_{\mathcal{N}}$ 使得 $a \leq ata, at = ta$. 又因为 $a \in (LR]$, 存在 $y \in L$, $x \in R$ 使得 $a \leq yx$. 因此 $tat \leq tyxt$. 因为 $ty \in L, xt \in R$, 所以 $tat \in (LR]$. 进一步地

$$a \leq ata \leq at(ata) = a(tat),$$

且

$$a(tat) = (at)(at) = (ta)(ta) = (tat)a.$$

4)$\Longrightarrow$5) 设 $a \in S$, 因为 $(Sa^2]$ 是 S 的左理想, 由假设 $(Sa^2]$ 是半素的, 所以从 $a^4 \in (Sa^2]$ 可得 $a^2 \in (Sa^2]$, 进一步地 $a \in (Sa^2]$. 同理从 $(a^2S]$ 是 S 的右理想得出 $a \in (a^2S]$, 故 S 是左、右正则的. 故

$$\begin{aligned} SaS &\subseteq S(Sa^2]S = (S](Sa^2](S] \subseteq (S^2a^2S] \subseteq (Sa^2S] \\ &\subseteq ((Sa](aS]], \\ ((Sa](aS]] &= ((Sa)(aS)] = (Sa^2S] \subseteq (SaS]. \end{aligned}$$

由上二式得出 $(SaS] = ((Sa](aS]]$. 因为 $(Sa], (aS]$ 分别为 S 的左、右理想, 由假设 $(SaS]$ 为强正则的.

5)$\Longrightarrow$ 6) 设 $a \in S$, 因为 $a \in (Sa^2]$ 且 $a \in (a^2S]$, 所以存在 $x, y \in S$ 使得 $a \leq xa^2, a \leq a^2y$. 记 $e_a = xa^2y$, 则 $e_a \in Sa^2S$ 且

$$\begin{aligned}
&e_a = xa^2yxaay \leq x(a^2y)(xa^2)y \\
&= (xa^2y)(xa^2y) = e_ae_a = e_a^2, \\
&a \leq xa^2 = xaa \leq x(a^2y)a = (xa^2y)a = e_aa, \\
&a \leq a^2y = aay = a(xa^2y) = ae_a.
\end{aligned}$$

由假设, $(Se_aS]$ 是强正则子半群.

6)$\Longrightarrow$7) 显然.

7)$\Longrightarrow$8) 设 $a \in S$, 由 7), 存在 $e_a \in Sa^2S$ 使得 $e_a \leq e_aa$, $a \leq ae_a$ 且 $(Se_aS]$ 是强正则的. 因为 $a \leq e_aa \in Sa$, 我们有 $a \in (Sa]$. 从 $a \leq ae_a$ 可得 $a \in (aS]$. 因此 $a \in (Sa] \cap (aS]$. 又因为

$$SaS \subseteq S(Se_a]S = (S](Se_a](S] \subseteq (S^2e_aS] \subseteq (Se_aS],$$

所以 $(SaS] \subseteq (Se_aS]$. 另一方面, $e_a \in (Sa^2S] \subseteq (SaS]$, 故 $(Se_aS] \subseteq (SaS]$, 故 $(SaS] = (Se_aS]$. 由假设 $(SaS]$ 是强正则的.

8)$\Longrightarrow$1) 设 $a \in S$, 因为 $a \in (Sa] \cap (aS]$, 我们有 $a \in (aS] \subseteq ((Sa]S] = (SaS]$. 又 $(SaS]$ 是强正则的, 存在 $x \in (SaS] \subseteq S$ 使得 $a \leq axa, xa = ax$. □

设 S 为强正则的序半群, 不难看出 S 是内襄正则的, 所以 $\forall x \in S, (x)_{\mathcal{N}}$ 是单序子半群.

§9 正则 duo 序半群

本节我们讨论左正则且左 duo 序半群、左正则序半群、正则

duo 序半群的特征. 至于右正则序半群、右正则且右 duo 序半群我们可类似得到相应的刻画. 主要结果来自 [43—50].

定理 3.9.1 设 S 为 poe 半群, 则下列各款是等价的:

1) S 是左正则的;

2) $(\forall a \in S)$ $(a, a^2) \in \mathcal{L}$;

3) S 的每个左理想是半素的;

4) S 的每个 $\mathcal{L}$ 类是 S 的左单子半群;

5) S 的每个 $\mathcal{L}$ 类是 S 的子半群;

6) S 为 S 的左单子半群的无交并;

7) S 为 S 的左单子半群的并;

证明 1)$\Longrightarrow$2) 因为 S 左正则, 所以 $(\forall a \in S)$ $a \in (Sa^2]$. 因此

$$L(a) \subseteq L((Sa^2]) = (Sa^2] \subseteq L(a^2),$$

显然 $L(a^2) \subseteq L(a)$. 故 $(a, a^2) \in \mathcal{L}$.

2)$\Longrightarrow$3) 设 L 为 S 的左理想, $a^2 \in L$. 因为 $L(a) = L(a^2)$, 所以 $a \in L(a) = L(a^2) \subseteq L$. 因此 L 为半素的.

3)$\Longrightarrow$4) 设 $(x)_{\mathcal{L}}$ 为 S 的一个 $\mathcal{L}$ 类, 显然 $(x)_{\mathcal{L}} \neq \emptyset$. 设 $a, b \in (x)_{\mathcal{L}}$, 因为 $\mathcal{L}$ 是 S 的右同余, 从 $(a, x) \in \mathcal{L}$, $(x, b) \in \mathcal{L}$ 可得 $(ab, xb) \in \mathcal{L}$, $(xb, b^2) \in \mathcal{L}$. 所以 $(ab, b^2) \in \mathcal{L}$. 由假设 $L(b) = L(b^2)$, 所以 $L(ab) = L(b) = L(x)$, 故 $ab \in (x)_{\mathcal{L}}$.

又设 I 为 $(x)_{\mathcal{L}}$ 的左理想. 设 $y \in (x)_{\mathcal{L}}$, 下证 $y \in I$. 取 $z \in I$, 则 $z \in (x)_{\mathcal{L}} = (y)_{\mathcal{L}}$. 由 3), 我们可以得出 $y \in L(y) = L(z) = L(z^2)$, 存在 $s \in S$ 使得 $y \leq z^2$ 或 $y \leq sz^2$. 如果 $y \leq z^2$, 则从 $z^2 \in (x)_{\mathcal{L}} I$ 及 $y \in (x)_{\mathcal{L}}$ 得出 $y \in (x)_{\mathcal{L}} I \subseteq I$. 如果 $y \leq sz^2$, 则 $y \leq ez^2$. 显然 $L(ez) \subseteq L(z)$, 又 $L(z) = L(z^2), z^2 \leq ez$, 所以 $L(z) \subseteq L(ez)$, 即

$$L(z) = L(ez),\ ez \in (z)_{\mathcal{L}} = (x)_{\mathcal{L}}.$$

同上我们有 $ez^2=(ez)z\in(x)_{\mathcal{L}}I$. 从而 $y\in I$.

4)$\Longrightarrow$5), 4)$\Longrightarrow$6) 显然.

5)$\Longrightarrow$2) $\forall x\in S,(x)_{\mathcal{L}}$ 为 S 的子半群，因此 $x^2\in(x)_{\mathcal{L}}$，即 $(x,x^2)\in\mathcal{L}$.

2)$\Longrightarrow$1) $\forall x\in S$, 因为 $x\in L(x^2)=L(x^4)\subseteq(Sx^4]$, 所以 S 是左正则的.

6)$\Longrightarrow$7) 显然.

7)$\Longrightarrow$3) 设 $S=\bigcup\{S_\alpha\mid\alpha\in Y\}$, S_α 为 S 的左单子半群，I 为 S 的左理想. 设 $a^2\in I$, $a\in S_\alpha$, 则 $I\cap S_\alpha$ 是 S_α 的左理想. 因为 S_α 为左单半群，故 $I\cap S_\alpha=S_\alpha$, 由此得出 $a\in I$. □

在以上定理的证明过程中，只有 3)$\Longrightarrow$ 4) 我们需要假设 S 是 poe 半群，其他步骤对一般序半群均成立.

定理 3.9.2 设 S 是序半群，则下列各款等价:

1) S 是左正则且左 duo ;

2) $\forall x\in S,N(x)=\{y\in S\mid x\in(Sy]\}$;

3) $\mathcal{N}=\mathcal{L}$;

4) S 的每个左理想 $I=\bigcup\{(x)_{\mathcal{N}}\mid x\in I\}$;

5) $(x)_{\mathcal{N}}$ 是 S 的左单子半群，$\forall x\in S$;

6) S 为左单半群的半格;

7) S 的每个左理想是右理想且为半素的;

8) $L(xy)=L(x)\cap L(y)$, $\forall x,y\in S$.

证明 由定理 3.9.1, 1.3.7 和推论 1.3.8, 我们知道 1), 2) 和 3) 是等价的.

3) $\Longrightarrow$ 4) 设 I 为 S 的左理想，则 $I\subseteq\bigcup\{(x)_{\mathcal{N}}\mid x\in I\}$; 又设 $y\in\bigcup\{(x)_{\mathcal{N}}\mid x\in I\}$, 存在 $x\in I$ 使得 $y\in(x)_{\mathcal{N}}$, 则 $y\in L(y)=L(x)\subseteq I$. 因此 $I=\bigcup\{(x)_{\mathcal{N}}\mid x\in I\}$.

4)$\Longrightarrow$5) $\forall x\in S$, $(x)_{\mathcal{N}}$ 是 S 的子半群，设 I 为 $(x)_{\mathcal{N}}$ 的左理想. $\forall y\in(x)_{\mathcal{N}}$, 取 $z\in I$, 则 $(x)_{\mathcal{N}}=(y)_{\mathcal{N}}=(z)_{\mathcal{N}}$. 因为 $(Sz^2]$ 为 S 的左理想，由假设

$$(Sz^2]=\bigcup\{(c)_{\mathcal{N}}\mid c\in(Sz^2]\}.$$

因为 $z^3\in(Sz^2]$, 所以 $(y)_{\mathcal{N}}=(z)_{\mathcal{N}}=(z^3)_{\mathcal{N}}$, $y\in(y)_{\mathcal{N}}\subseteq(Sz^2]$, 根据 $y\in(Sz^2]$, 存在 $k\in S$ 使得 $y\leq kz^2$. 因为 $\mathcal{N}$ 为 S 上的完全半格同余，则

$$(y)_{\mathcal{N}}=(ykz^2)_{\mathcal{N}}=(kz)_{\mathcal{N}}=(x)_{\mathcal{N}},$$

因此 $kz\in(x)_{\mathcal{N}}$, $y\leq(kz)z\in(x)_{\mathcal{N}}I\subseteq I$. 由于 $y\in(x)_{\mathcal{N}}$, I 为 $(x)_{\mathcal{N}}$ 的左理想，则 $y\in I$, 即 $I=(x)_{\mathcal{N}}$.

5) $\Longrightarrow$ 6) 显然.

6) $\Longrightarrow$ 7) 设 σ 为半格同余且 $\forall x\in S,(x)_\sigma$ 是 S 的单子半群. 设 I 为 S 的左理想， $x\in I$, $\forall y\in S$, 则 $(xy)_\sigma=(yx)_\sigma$, 因为 $I\cap(yx)_\sigma$ 是 $(yx)_\sigma$ 的左理想，由 $(yx)_\sigma$ 是左单的，必有 $I\cap(yx)_\sigma=(yx)_\sigma=(xy)_\sigma$, 因此 $xy\in I$, 即 I 为右理想. 进一步地，设 $x^2\in I$, 则 $(x^2)_\sigma=(x)_\sigma$ 且 $(x)_\sigma\cap I$ 为 $(x)_\sigma$ 的左理想. 事实上，因为 $x^2\in I\cap(x)_\sigma$, 所以 $I\cap(x)_\sigma\neq\emptyset$, 且

$$\begin{aligned}(x)_\sigma(I\cap(x)_\sigma) &\subseteq (x)_\sigma I\cap(x)_\sigma^2=(x)_\sigma I\cap(x^2)_\sigma\\ &\subseteq SI\cap(x)_\sigma\subseteq I\cap(x)_\sigma.\end{aligned}$$

设 $a\in I\cap(x)_\sigma$, $(x)_\sigma\ni b\leq a$. 因为 $b\leq a\in I$, I 为 S 的左理想, 因此 $b\in I\cap(x)_\sigma$. 由于 $(x)_\sigma$ 是左单的, 因此 $(x)_\sigma\cap I=(x)_\sigma$, 故 $x\in I$.

7)$\Longrightarrow$ 8) 设 $x,y\in S$, 显然 $L(xy)\subseteq L(x)\cap L(y)$. 因为 $\forall a\in S,a^2\in(Sa]$, 由假设 $a\in(Sa]$. 设 $a\in L(x)\cap L(y)$, 则存

在 $s_1, s_2 \in S$ 使得 $a \leq s_1x, a \leq s_2y$, 则 $a^2 \leq s_1xs_2y$. 因为 $(Sx]$ 也为 S 的右理想，所以

$$s_1xs_2 \in (Sx]S \subseteq (Sx],$$

故存在 $s_3 \in S$ 使得 $s_1xs_2 \leq s_3x$, 从而

$$a^2 \leq s_1xs_2y \leq s_3xy \in Sxy,$$

由此推出 $a^2 \in (Sxy] \subseteq L(xy)$. 因 $L(xy)$ 是半素的，故 $a \in L(xy)$, 即 $L(xy) = L(x) \cap L(y)$.

8) $\Longrightarrow$ 1) $\forall a \in S$, 由假设 $L(a^2) = L(a)$, 所以 $L(a^4) = L(a)$, $a \in L(a^4)$, 推出 $a \in (Sa^2]$.

另一方面，设 L 为 S 的左理想，设 $r \in L, \forall s \in S$. 因为 $L(rs) = L(r) \cap L(s) = L(s) \cap L(r) = L(sr)$, 所以 $rs \in L(sr) \subseteq L(r) \subseteq L$, 因此 L 为 S 的右理想. □

定理 3.9.3 设 S 为序半群，则下列各款等价:

1) S 是左单序半群的链;

2) S 的每个左理想是右理想且是素的;

3) S 是左正则且左 duo 且 S 的所有左理想集关于集合的包含关系构成链;

4) S 是左 duo 的且 $\forall x, y \in S, x \in (Sxy]$ 或 $y \in (Sxy]$.

证明 1)$\Longrightarrow$ 2) 由定理 3.9.2 及假设，S 的每个左理想是右理想，设 I 为 S 的左理想，σ 为 S 上的半格同余且 $\forall x \in S$, $(x)_\sigma$ 是左单的，$ab \in I$, 则 $(ab)_\sigma \cap I$ 为 $(ab)_\sigma$ 的左理想. 又 $(a)_\sigma \preceq (b)_\sigma$ 或 $(b)_\sigma \preceq (a)_\sigma$, 则 $(ab)_\sigma = (a)_\sigma$ 或 $(b)_\sigma$, 因此 $(a)_\sigma = (ab)_\sigma \cap I$ 或 $(b)_\sigma = (ab)_\sigma$, 即 $a \in I$ 或 $b \in I$.

2) $\Longrightarrow$ 3) 由定理 3.9.2, S 是左正则且左 duo 的. 设 I, J 为 S 的两个左理想且 $I \not\subseteq J$. 存在 $a \in I, a \notin J$, $b \in J$. 则 $ab \in IJ \subseteq J$. 又 S 是左 duo 的，我们也有 $ab \in I$. 因为

$ab \in (Sab]$, 所以 $a \in (Sab]$ 或 $b \in (Sab]$. 如果 $a \in (Sab]$, 则 $a \in (Sab] \subseteq (Sb] \subseteq J$, 矛盾. 因此 $b \in (Sab] \subseteq I$, 即 $I \subseteq J$.

3) $\Longrightarrow$ 4) 因为 $(Sx], (Sy]$ 为 S 的左理想, 必有 $(Sx] \subseteq (Sy]$ 或 $(Sy] \subseteq (Sx]$. 如果 $(Sx] \subseteq (Sy]$, 则

$$x \in (Sx^2] = ((Sx](Sx^2]] \subseteq ((Sx](Sx]] \subseteq ((Sx](Sy]] \subseteq (Sxy].$$

同理, 由 $(Sy] \subseteq (Sx]$ 可证 $y \in (Sxy]$.

4)$\Longrightarrow$ 1) 由假设 S 显然是左正则的. 由定理 3.9.2, S 为左单序半群的半格. 即 $\forall x \in S, (x)_{\mathcal{N}}$ 是左单子半群. $\forall x, y \in S$, 如果 $x \in (Sxy]$, 则 $N(x) = N(xy)$, 即 $(x)_{\mathcal{N}} = (x)_{\mathcal{N}}(y)_{\mathcal{N}}$, $(x)_{\mathcal{N}} \preceq (y)_{\mathcal{N}}$. 如果 $y \in (Sxy]$, 同理可得 $(y)_{\mathcal{N}} \preceq (x)_{\mathcal{N}}$. □

和我们在第六节论及的内容相似, 如果 S 是左正则和左 duo 的序半群, 则 ex 是 $(x)_{\mathcal{N}}, \forall x \in S$ 的最大元且集 $\{(x)_{\mathcal{N}} \mid x \in S\}$ 和 S 的极大左单子半群集一致. 设 S 为 poe 半群, 则 S 是左单序半群的半格 (链) 当且仅当 S 是左单 poe 半群的半格 (链). 这些结论的证明读者可仿照第六节相关结论给出.

定理 3.9.4 设 S 是左正则且左 duo 的序半群, 则 S 是左单半群的半格, 但一般情况下不是惟一的. S 是左单半群的惟一完全半格.

该结论的证明类似于命题 3.6.5, 我们这里仅提供一个反例.

例 3.9.5 设 $S = \{a, b, c, d, e, f\}$, 其上的乘法运算和二元关系定义如下:

·	a	b	c	d	e	f
a	a	a	a	a	a	a
b	a	b	a	d	e	f
c	c	c	c	c	c	c
d	a	d	a	b	e	f
e	a	e	a	e	e	e
f	a	f	a	f	e	f

$$\leq := \{(f,e)\}$$

则 $(S,\cdot,\leq)$ 是一个序半群. 因为 $\forall a \in S$, $(a,a^2) \in \mathcal{L}$, 所以 S 为左正则的. 又

S 的所有左理想是: $\{a,c\},\{a,c,e,f\}$ 和 S;

S 的所有右理想是: $\{a\},\{c\},\{a,c\},\{a,e,f\}$, $\{a,c,e,f\}$, $\{a,b,d,e,f\}$ 和 S.

因为 S 的所有左理想均为右理想, 所以 S 也为左 duo 的. 对该半群,

$$\begin{aligned}\mathcal{N} &= \{(a,a),(a,c),(b,b),(b,d),(c,a),(c,c),(d,b),\\ &\quad (d,d),(e,e),(e,f),(f,e),(f,f)\}.\end{aligned}$$

设 σ 是 S 上的二元关系,

$$\begin{aligned}\sigma &= \{(a,a),(a,c),(b,b),(b,d),(c,a),(c,c),\\ &\quad (d,b),(d,d),(e,e),(f,f)\}.\end{aligned}$$

则 σ 也为 S 上的半格同余且 $(x)_\sigma, \forall x \in S$ 是左单的, 但是 $\sigma \neq \mathcal{N}$.

□

以上我们讨论了左 (右) 正则和左 (右) duo 的序半群. 一个序半群 S 称为 duo 的, 如果 S 是左 duo 和右 duo 的. S 称为 B 单的, 如果 S 不包含真的双理想. 下面我们给出一组结论, 读者通过以上的阅读可以自己推出证明过程.

引理 3.9.6 设 S 为序半群，S 是 B 单的当且仅当 $(aSa] = S, \forall a \in S$ 当且仅当 S 为左单和右单的.

引理 3.9.7 设 S 为正则序半群，则 S 为 duo 的当且仅当 $(xSx] = (Sx] = (xS], \forall x \in S$.

由上准备我们有

定理 3.9.8 设 S 为序半群，则以下各款是等价的：

1) S 是正则 duo 的；
2) $B(ab) = B(a) \cap B(b), \forall a, b \in S$；
3) S 是 duo 的且 S 的每个左理想和右理想均为半素的；
4) S 是正则的且 $(xS] = (Sx], \forall x \in S$；
5) $N(x) = \{y \in S \mid x \in (ySy]\}, \forall x \in S$；
6) $\mathcal{N} = \mathcal{H} = \mathcal{B} = \{(x, y) \in S \times S \mid B(x) = B(y)\}$；
7) 设 B 为 S 的双理想，则 $B = \bigcup\{(x)_{\mathcal{N}} \mid x \in B\}$；
8) S 为 B 单序半群的完全半格.

值得注意的是，一般半群 S 如果是左单且是右单的，则 S 一定是群. 但就序半群而言，B 单序半群不一定是序群，见下面反例.

例 3.9.9 考虑序半群 $S = \{a, b, c, d, f\}$，其上的乘法运算和序关系定义如下：

·	a	b	c	d	f
a	b	a	a	a	a
b	a	b	b	b	b
c	a	b	b	b	b
d	a	b	b	d	d
f	a	b	c	d	f

$$\begin{aligned}\leq: \ = \ &\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(f,f),(f,d),\\ &(f,c),(f,b),(d,c),(d,b),(c,b)\}.\end{aligned}$$

设 L 外围 S 的任一左理想, 则 $|L|>1$ 且 L 包含 f. 因为 $(Sf]=S$, 所以 $L=S$, 即 S 是左单的. 同理可看出 S 为右单的, 从而 S 是 B 单的但 S 显然不是序群.

§10 序半群的亚直积分解

设 $\{(S_\alpha,\circ_\alpha,\le_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 是序半群簇, 它们的笛卡尔积 (Cartesian product)

$$\prod_{\alpha\in A} S_\alpha := \{(x_\alpha)_{\alpha\in A} \mid x_\alpha\in S, \forall\alpha\in A\}$$

关于以下定义的乘法 "·" 和二元关系 "≤" 是一个序半群.

$$\begin{aligned}\cdot : \prod_{\alpha\in A} S_\alpha\times\prod_{\alpha\in A} S_\alpha &\to \prod_{\alpha\in A} S_\alpha \mid ((x_\alpha)_{\alpha\in A},(y_\alpha)_{\alpha\in A})\\ &\to (x_\alpha)_{\alpha\in A}\cdot(y_\alpha)_{\alpha\in A}=(x_\alpha\circ_\alpha y_\alpha)_{\alpha\in A},\end{aligned}$$

$$\le : (x_\alpha)_{\alpha\in A}\le(y_\alpha)_{\alpha\in A}\Longleftrightarrow x_\alpha\le_\alpha y_\alpha, \forall\alpha\in A.$$

为了方便起见, 以后我们由 $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 代替序半群簇 $\{(S_\alpha,\circ_\alpha,\le_\alpha)\}_{\alpha\in A}$. 对笛卡尔积 $\prod\limits_{\alpha\in A} S_\alpha$, 映射

$$\pi_\beta : \prod_{\alpha\in A} S_\alpha\mapsto S_\beta \mid (x_\alpha)_{\alpha\in A}\mapsto x_\beta$$

称为序半群 $\prod\limits_{\alpha\in A} S_\alpha$ 到 S_β 的投影, 显然 π_β 是满同态映射. 本节主要结果来自 [51—53].

定义 3.10.1 序半群 S 称为序半群簇 $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 的亚直积, 如果满足:

1) 存在 $\prod\limits_{\alpha\in A} S_\alpha$ 的子半群 T 使得 $S\cong T$;

2) $\pi_\alpha(T)=S_\alpha, \forall\alpha\in A$.

等价地，存在一个可逆的保序同态 $f: S \mapsto \prod_{\alpha\in A} S_\alpha$ 使得 $\pi_\alpha(f(S)) = S_\alpha, \forall\alpha \in A$.

定义 3.10.2 设 $(S,\cdot,\le)$ 是序半群，$\sum$ 是 S 的拟序簇. 我们称 $\sum$ 分离 S 的元素，如果 $\forall x,y \in S$, $(x,y) \notin \le$, 则存在 $\sigma \in \sum$ 使得 $(x,y) \notin \sigma$.

引理 3.10.3 设 $(S,\cdot,\le)$ 是序半群，$\sum$ 是 S 的拟序簇. 如果 $\sum$ 分离 S 的元素，则 $\bigcap\{\sigma \mid \sigma \in \sum\} = \le$. 反之，如果 $\bigcap\{\sigma \mid \sigma \in \sum\} \subseteq \le$ ，则 $\sum$ 分离 S 的元素.

证明 因为 $\sum$ 是 S 的拟序簇，所以 $\bigcap\{\sigma \mid \sigma \in \sum\}$ 仍为 S 的拟序，因此

$$\le \ \subseteq \ \bigcap\{\sigma \mid \sigma \in \sum\}.$$

设 $(x,y) \in \bigcap\{\sigma \mid \sigma \in \sum\}$, 如果 $(x,y) \notin \le$, 由定义 3.10.2, 存在 $\sigma \in \sum$ 使得 $(x,y) \notin \sigma$, 矛盾. 因此 $\bigcap\{\sigma \mid \sigma \in \sum\} \subseteq \le$.

反之，设 $x,y \in S$ 且 $x \not\le y$, 如果 $(x,y) \in \sigma, \forall\sigma \in \sum$, 则

$$(x,y) \in \bigcap\{\sigma \mid \sigma \in \sum\} \subseteq \le,$$

即 $x \le y$, 矛盾. □

定理 3.10.4 设 $(S,\cdot,\le)$ 是序半群，如果 S 为序半群簇 $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 的亚直积，则存在 S 的拟序簇 $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 分离 S 的元素. 反之，如果存在 S 的拟序簇 $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 分离 S 的元素，则 S 为序半群簇 $\{S/\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 的亚直积，这里 $\rho_\alpha = \sigma_\alpha \cap \sigma_\alpha^{-1}$.

证明 设 $f: S \mapsto \prod_{\alpha\in A} S_\alpha$ 是逆保序同态且 $\pi_\alpha(f(S)) = S_\alpha, \forall\alpha \in A$. 我们考虑映射 $\phi_\alpha = \pi_\alpha \circ f$, 则 ϕ_α, $\forall\alpha \in A$ 是 S 到 S_α 的半群同态. 设 $x,y \in S$ 且 $x \le y$, $f(x) = (x_\alpha)_{\alpha\in A}$, $f(y) = (y_\alpha)_{\alpha\in A}$. 因为 f 是保序的，所以 $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \le (y_\alpha)_{\alpha\in A}$, 即 $x_\alpha \le_\alpha y_\alpha$,$\forall\alpha \in A$. 故 $\pi_\alpha((x_\alpha)_{\alpha\in A}) \le_\alpha \pi_\alpha((y_\alpha)_{\alpha\in A})$, 即 $\pi_\alpha \circ f(x) \le \pi_\alpha \circ f(y)$. 由此证得 ϕ_α 为 S 到 S_α 的同态映射. 根

据引理 2.2.8,

$$\sigma_\alpha = \{(x,y) \in S \times S \mid \phi_\alpha(x) \leq_\alpha \phi_\alpha(y)\}$$

是 S 上的拟序. 我们现在证明拟序簇 $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 分离 S 的元素. 由引理 3.10.3, 我们仅需证

$$\bigcap\{\sigma_\alpha \mid \alpha \in A\} \subseteq \leq .$$

设 $(x,y) \in \sigma_\alpha, \forall\alpha \in A$, 因为 $\phi_\alpha(x) \leq_\alpha \phi_\alpha(y), \forall\alpha \in A$, 有

$$\pi_\alpha(f(x)) \leq_\alpha \pi_\alpha(f(y)), \forall\alpha \in A,$$

即 $x_\alpha \leq_\alpha y_\alpha, \forall\alpha \in A$, 也即 $f(x) \leq f(y)$. 因为 f 是逆保序的, 所以 $x \leq y$, 即 $(x,y) \in\leq$.

反之, 设 $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 S 上分离 S 元素的拟序簇, 我们作映射

$$f : S \mapsto \prod_{\alpha\in A} S/\rho_\alpha \mid x \mapsto ((x)_{\rho_\alpha})_{\alpha\in A}.$$

由定理 2.2.9, ρ_α 为 S 上正则同余, 所以 $\prod\limits_{\alpha\in A} S/\rho_\alpha$ 有意义. f 显然为 S 到 $\prod\limits_{\alpha\in A} S/\rho_\alpha$ 的半群同态, 设 $x,y \in S, x \leq y$. 因为 $(x,y) \in\leq\subseteq \sigma_\alpha, \forall\alpha \in A$, 由引理 2.2.8 的证明, 在 S/ρ_α 上, $(x)_{\rho_\alpha} \preceq (y)_{\rho_\alpha}, \forall\alpha \in A$, 因此 $((x)_{\rho_\alpha})_{\alpha\in A} \leq ((y)_{\rho_\alpha})_{\alpha\in A}$, 即 f 是序半群 S 到序半群 $\prod\limits_{\alpha\in A} S/\rho_\alpha$ 的同余.

又设 $x,y \in S, f(x) \leq f(y)$, 有 $(x)_{\rho_\alpha} \preceq (y)_{\rho_\alpha}, \forall\alpha \in A$, 即

$$(x,y) \in \sigma_\alpha, \forall\alpha \in A, \quad (x,y) \in \bigcap\{\sigma_\alpha \mid \alpha \in A\}.$$

因为 $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 分离 S 的元素, 由引理 3.10.3,

$$(x,y) \in \bigcap\{\sigma_\alpha \mid \alpha \in A\} = \leq .$$

故 f 是逆保序的.

$\forall (y)_{\rho_\alpha} \in S/\rho_\alpha, \forall \alpha \in A$, 存在 S 的元素 y 使得 $\pi_\alpha(f(y)) = (y)_{\rho_\alpha}$, 因此

$$\pi_\alpha \circ f(S) = S/\rho_\alpha, \forall \alpha \in A.$$

由亚直积的定义，定理得证. □

命题 3.10.5 设 $(S, \cdot, \leq)$ 是序半群且包含最小元 e, $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 S 的理想簇且 $\bigcap\limits_{\alpha\in A} I_\alpha = \{e\}$. 则 S 是序半群簇 $\{S/\rho_{I_\alpha}\}_{\alpha\in A}$ 的亚直积. □

证明 由定理 2.2.6, $\rho_{I_\alpha}, \forall \alpha \in A$ 为 S 上的正则同余且 S/ρ_{I_α} 上的序关系 $\leq_\alpha$ 为定理 2.2.6 中证明所述. 设

$$\sigma_{I_\alpha} = \{(x, y) \in S \times S \mid (x)_{\rho_{I_\alpha}} \leq_\alpha (y)_{\rho_{I_\alpha}}\},$$

则 σ_{I_α} 为 S 上的拟序且 $\sigma_{I_\alpha} = \leq \cup (I_\alpha \times S)$. 因为

$$\begin{aligned}\bigcap_{\alpha\in A} \sigma_{I_\alpha} &= \bigcap_{\alpha\in A} (\leq \cup (I_\alpha \times S)) = \leq \cup ((\bigcap_{\alpha\in A} I_\alpha) \times S) \\ &= \leq \cup (\{e\} \times S) = \leq .\end{aligned}$$

根据定理 3.10.4, S 是序半群簇 $\{S/\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 的亚直积.

定义 3.10.6 一个序半群 S 称为亚直不可约的，如果 S 是序半群簇 $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 的亚直积，即存在 $\prod\limits_{\alpha\in A} S/\rho_\alpha$ 的子半群 T 使得 $S \cong T$ 且 $\pi_\alpha(T) = S_\alpha, \forall \alpha \in A$, 那么存在 $\beta \in A$ 使得投影 $\pi_\beta : T \mapsto S_\beta$ 是拟保序.

等价地，如果 $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 为序半群簇， $f : S \mapsto \prod\limits_{\alpha\in A} S_\alpha$ 是逆保序的同态且 $\pi_\alpha(f(S)) = S_\alpha, \forall \alpha \in T$, 则存在 $\beta \in A$ 使得映射 $\pi_\beta : f(S) \mapsto S_\beta$ 是逆保序同态.

S 的拟序 σ 称为真拟序，如果 $\sigma \neq \leq$.

定理 3.10.7 设 $(S,\cdot,\leq)$ 是序半群，如果 S 是亚直不可约的，则 S 的任一些真拟序之交仍为真拟序. 反之，如果 S 的所有真拟序之交仍为真拟序，则 S 是亚直不可约的.

证明 假设 S 为亚真不可约的且 $\{\sigma_\alpha \mid \alpha \in A\}$ 是 S 的真拟序集. 我们证明 $\bigcap\{\sigma_\alpha \mid \alpha \in A\} \neq \leq$. 如果 $\bigcap\{\sigma_\alpha \mid \alpha \in A\} = \leq$，由引理 3.10.3, $\{\sigma_\alpha \mid \alpha \in A\}$ 分离 S 的元素，从而 S 为 $\prod\limits_{\alpha \in A} S/\rho_\alpha$ 的亚直积，即映射

$$f : S \mapsto \prod_{\alpha \in A} S/\rho_\alpha \mid x \mapsto ((x)_{\rho_\alpha})_{\alpha \in A}$$

是逆保序的同态且 $\pi_\alpha(f(S)) = S/\rho_\alpha, \forall \alpha \in A$. 设 $\beta \in A$ 使得 $\pi_\beta : f(S) \mapsto S/\rho_\alpha$ 是逆保序同态，因为 $\beta \in A$, 所以 $\leq \subseteq \sigma_\beta$. 又 σ_β 为真拟序，所以存在 $(x,y) \in \sigma_\beta$ 但 $(x,y) \notin \leq$. 根据 S/ρ_β 上序关系的定义 (见第二章), 由 $(x,y) \in \sigma_\beta$ 得 $(x)_{\rho_\alpha} \leq_\alpha (y)_{\rho_\alpha}$, 即 $\pi_\beta(f(x)) \leq_\alpha \pi_\beta(f(y))$. 因为 π_β 和 f 均为逆保序的，故 $x \leq y$, 不可能.

反之，设 S 为序半群簇 $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 的亚直积，有定理 3.10.3, S 的拟序簇

$$\sigma_\alpha = \{(x,y) \in S \times S \mid \pi_\alpha(f(x)) \leq_\alpha \pi_\alpha(f(y))$$

分离 S 的元素，即 $\bigcap\{\sigma_\alpha \mid \alpha \in A\} = \leq$. 如果 $\forall \alpha \in A$, $\sigma_\alpha \neq \leq$, 那么

$$\leq = \bigcap\{\sigma_\alpha \mid \alpha \in A\} \supseteq \bigcap\{\sigma \mid \sigma\text{为}S\text{的拟序}\} \supset \leq,$$

矛盾. 上面证明了存在 $\beta \in A$ 使得 $\sigma_\beta = \leq$. 我们考虑投影 $\pi_\beta : f(S) \mapsto S_\beta$. 如果

$$\pi_\beta(f(x)) \leq_\beta \pi_\beta(f(y)),$$

则 $(x,y)\in\sigma_\beta=\leq$, 所以 $x\leq y$, 故 π_β 是逆保序的. □

推论 3.10.8 每个具有最小真拟序的序半群是亚直不可约的.

证明 设 w 为 S 上的最小真拟序, 则 S 的所有真拟序之交为 w, 由定理 3.10.7, S 是亚直不可约的. □

注 3.10.9 设 $S=\{x\}$, $\leq=S\times S, x^2=x$, 则 S 为序半群且是亚直不可约的.

定理 3.10.10 每个序半群 $(S,\cdot,\leq)$ 是亚直不可约序半群簇的亚直积.

证明 如果 $S=\{x\}$, 则由注 3.10.9, S 是亚直不可约的, 不难看出 S 是 S 和 S 的亚直积. 现在假设 S 多于两个元素, 对 S 的每个元素对 $x,y,x\not\leq y$, 我们定义集合

$$M(x,y):=\{\sigma\mid\sigma\text{为}S\text{的拟序且}(x,y)\notin\sigma\}.$$

因为 $\leq\in M(x,y)$, 所以 $M(x,y)\neq\emptyset$. 由 Zorn 引理, $M(x,y)$ 中存在极大元, 记为 $\sigma(x,y)$. 这时拟序集 $\{\sigma(x,y)\mid x,y\in S,x\not\leq y\}$ 分离 S 的元素. 由定理 3.10.3, S 为序半群簇

$$\{S/\rho(x,y)\mid x,y\in S,x\not\leq y\},\quad \rho=\sigma(x,y)\cap\sigma^{-1}(x,y)$$

的亚直积. 下面我们证明 $S/\rho(x,y),x\not\leq y$ 是亚直不可约的. 设

$$R(x,y):=\{r\mid r\text{为}S/\rho(x,y)\text{的真拟序}\}.$$

因为 $\sigma(x,y)\in M(x,y)$, 所以 $(x,y)\notin\sigma(x,y)$, 故

$$((x)_{\rho(x,y)},(y)_{\rho(x,y)})\notin\preceq_{S/\rho(x,y)}.$$

设 $r\in R(x,y)$, r 为 $S/\rho(x,y)$ 的真拟序, 这时一定存在 S 上的拟序 μ_r 使得 $\mu_r\supseteq\sigma(x,y)$ 且

$$((a)_{\rho(x,y)},(b)_{\rho(x,y)})\in r\Longleftrightarrow(a,b)\in\mu_r.$$

如果 $(x,y)\notin\mu_r$, 则 $\mu_r\in M(x,y)$, 这时 $\mu_r=\sigma(x,y)$. 另一方面, 因为 r 为 $S/\rho(x,y)$ 上的真拟序, 我们有 $\preceq_{\rho(x,y)}\subset r$, 即存在 $((s)_{\rho(x,y)},(t)_{\rho(x,y)})\in r$ 使得 $((s)_{\rho(x,y)},(t)_{\rho(x,y)})\notin\preceq_{\rho(x,y)}$. 因此 $(s,t)\in\mu_r$ 但 $(s,t)\notin\sigma(x,y)$. 故

$$M(x,y)\ni\mu_r\supset\sigma(x,y),$$

矛盾. 由上证明, $(x,y)\in\mu_r$, 即 $((x)_{\rho(x,y)},(y)_{\rho(x,y)})\in r$ 但

$$((x)_{\rho(x,y)},(y)_{\rho(x,y)})\notin\preceq_{S/\rho(x,y)}.$$

由定理 3.10.7, $S/\rho(x,y)$ 是亚直不可约的. □

下面我们给出一个具体分解的例子.

例 3.10.11 $N=\{1,2,3,\cdots\}$, 则 N 关于自然序和数的加法 "+" 构成一个全序半群, 对任意 $n\in N$, 我们作集合

$$A_n:=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1}\}$$

且规定 $x_i\leq_n x_j\Leftrightarrow i\leq j$ 并规定 A_n 上的乘法运算 "$*_n$" 如下

$$x_i *_n x_j=\begin{cases} x_{i+j}, & i+j<n+1,\\ x_{n+1}, & i+j\geq n+1,\end{cases}$$

则 $(A_n,*_n,\leq_n)$ 是一个序半群且 A_{n+1} 是亚直不可约的. 事实上, 设

$$\sigma=\leq_n\cup\{(x_{n+1},x_n)\},$$

则 σ 为 A_n 的最小真拟序, 根据定理 3.10.7 的推论, $(A_n,*_n,\leq_n)$ 为亚直不可约的.

作映射

$$f:N\mapsto\prod_{n\in N}A_n\mid y\mapsto(y_n)_{n\in N},$$

这里

$$y_n := \begin{cases} x_y, & y < n+1, \\ x_{n+1}, & y \geq n+1, \end{cases}$$

则 f 为 N 到 $\prod_{n\in N} A_n$ 的逆保序同态映射且 $\pi_n(f(N)) = A_n$, $\forall n \in N$. 事实上, 设 $y \in A_n$, 存在 $1 \leq i \leq n+1$ 使得 $y = x_i$, $f(i) = (i_k)_{k\in N}$, $\pi_n(f(i)) = i_n$. 如果 $i < n+1$, 则 $i_n := x_i = y$; 如果 $i = n+1$, 则 $i_n := x_{n+1} = x_i = y$.

第四章　正 (负) 序半群

本章我们讨论两类特殊的序半群，即正序半群和负序半群. 主要结果来自 [19,54,55] 等.

正序 (负序) 半群，特别是更特殊的正序 (负序) 半群，例如本章所论及的 NM 半群和 PQ 半群等是一般序半群研究中较为容易入手的两类序半群，因为它们的结构和已知的一些序集，例如半格、分配格等的结构比较相似，而且也可以从已知的平凡序半群结构中得到启发，在以后的章节中我们还要研究正序格序半群等.

§1　序理想格

设 $(S, \cdot, \leq)$ 是负序半群 (N 序半群), 即 $\forall a, b \in S$, $ab \leq a, b$. 设 $H \neq \emptyset$ 且 $H \subseteq S$, 如果 $(H] = H$, H 称为 S 的序理想. 一个可换序半群 S 称为 M 半群，如果 $\forall a, b \in S$ 且 $a \leq b$, 则存在 $c \in S$ 使得 $a = bc$. 一个负序的 M 半群有时也简写成 NM 序半群.

定义 4.1.1　一个格 $(L, \wedge, \vee)$ 称为乘格 (multiplicative lattice), 如果上有一个二元运算满足

$$(\forall a, b, c \in L)\ a(b \vee c) = ab \vee ac, (a \vee b)c = ac \vee bc.$$

一个乘格中乘法元素如果具有结合律，则 L 就称为半格序半群.

本节以下内容如没有特殊说明，序半群 S 均为包含 0 的可换半群且 0 是最小元，乘格也可换.

定义 4.1.2 设 S 为序半群，如果集 $\{x \in S \mid ax \leq b\}$ 非空且有最大元存在，该最大元称为 b 关于 a 在 S 中的剩余 (residual)，记为 $b:a$. 一个带有元素 0 的序半群 S 称为有伪补的 (pseudo-complemented) 如果 $\forall a \in S, 0:a$ 存在. $0:a$ 有时记为 a^*，称为 a 的伪补.

例 4.1.3 设 $S=\{\frac{1}{n} \mid n=1,2,3,\cdots\} \cup (-\infty,0]$，定义 S 上的乘法 "$\circ$" 如下：

$$x \circ y = \begin{cases} xy, & x,y \in \{\frac{1}{n} \mid n=1,2,3,\cdots\}; \\ -xy, & x,y \in (-\infty,0]; \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

则 $(S,\circ)$ 关于普通的序关系是序半群. 设 $x \in \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n = 1,2,3,\cdots\}$，则

$$x^* = 0:x = \max\{y \in S \mid x \circ y \leq 0\} = 0;$$

如果 $x \in (-\infty,0)$，则 $x^*=1$. 因此 S 为有伪补的序半群且 0 元不是最小元.

定理 4.1.4 设序半群 S 具有 0 元，那么 S 的序理想集 $L(S)$ 是完备的分配的乘格且是可剩余的.

证明 显然 $L(S)$ 关于集包含关系构成完备格且是分配的. $L(S)$ 也是乘格，事实上，设 $A,B \in L(S)$，$A \circ B := (AB]$，则

$$\begin{aligned} (\forall C \in L(S))\ A \circ B \cup A \circ C &= (AB] \cup (AC] \\ &\subseteq (A(B \cup C)] = A \circ (B \cup C); \end{aligned}$$

又设 $x \in A \circ (B \cup C]$，则存在 $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ 使得 $x \leq ab$ 或 $x \leq ac$，因此 $x \in A \circ B \cup A \circ C$，即

$$A \circ (B \cup C) = A \circ B \cup A \circ C.$$

同理可证 $(B\cup C)\circ A=B\circ A\cup C\circ A$. 所以 $L(S)$ 是乘格.

又集 $\{M_i\in L(S)\mid M_i\circ B\subseteq A\}\neq\emptyset$, 因为 $(0]$ 含在该集中. 因为

$$(\bigcup_i M_i)\circ B=\bigcup_i(M_i\circ B)\subseteq A,$$

由 Zorn 引理, 集 $\{M_i\in L(S)\mid M_i\circ B\subseteq A\}$ 包含极大元且为最大元, 所以 $A:B$ 存在. □

定理 4.1.5 1) 序半群 S 是负序的当且仅当 S 的序理想和理想一致;

2) S 为 M 半群当且仅当 S 关于半群结构的理想是序理想且 $a\in aS,\forall a\in S$.

证明 设 $MI(S)$ 表示 S 关于半群结构的理想集.

1) 必要性 显然 $I(S)\subseteq L(S)$. 设 $A\in L(S)$, 即 $(A]=A$. $\forall a\in A,x\in S$, 则 $xa,ax\leq a$, 因此 $xa,ax\in(A]$, 所以 $A=(A]$ 也为 S 的理想.

充分性 $\forall a,b\in S$, $ab\in I(a),I(b)$. 因为 $(a]$ 和 $(b]$ 分别是包含 a 和 b 的最小序理想, 由假设 $I(a)=(a]$, $I(b)=(b]$, 因此 $ab\leq a,b$.

2) 必要性 设 A 为 S 半群理想, 设 $a\in A,\forall b\in S,b\leq a$, 则存在 $c\in S$ 使得 $b=ac\in A$, 故 $A\in L(S)$. 因为 $a\leq a$, 所以 $a=ae\in aS$.

充分性 如果 $MI(S)\subseteq L(S)$ 且 $a\in aS,\forall a\in S$, 则对 $a\leq b$, 因为 b 生成 S 半群结构的主理想为 $bS\cup\{b\}=bS\in MI(S)\subseteq L(S)$, 所以 $a\in bS$, 存在 $c\in S$ 使得 $a=bc$. □

由定理 4.1.5 容易得出: S 为 N-M 序半群当且仅当 $MI(S)=L(S)$ 且 $a\in aS,\forall a\in S$.

命题 4.1.6 设 S 为序半群, $[a]$ 表示 S 关于半群结构的

主理想，则下列各款成立：

1) S 为负序的当且仅当映射 $\phi:\{[a]\mid a\in S\}\mapsto S\mid[a]\mapsto a,\forall a\in S$ 是保序的；

2) S 是 M 半群当且仅当 A) $a\in Sa,\forall a\in S$; B) 映射

$$\psi:S\mapsto\{[a]\mid a\in S\}\mid a\mapsto[a],\forall a\in S$$

是保序的.

3) 设 S 为带 0 元的半群，S 可以序化为 N-M 序半群当且仅当

$$\text{A) } a\in Sa,\forall a\in S;\quad \text{B) } Sa=Sb\Rightarrow a=b.$$

证明 由定理 4.1.4, 1) 与 2) 的证明读者可自行验证，我们仅证 3). 设 S 上存在序关系 "$\leq$" 使得 $(S,\cdot,\leq)$ 为 N-M 序半群. 则由 1) 与 2), 3) 的必要性证明显然. 反之设 A) 和 B) 成立，定义 S 上的二元关系 "$\leq$" 如下：

$$(\forall a,b\in S)\ a\leq b\Longleftrightarrow[a]\subseteq[b].$$

则 $\leq$ 为 S 上的序关系且 $(S,\cdot,\leq)$ 为序半群. 由 "$\leq$" 的定义

$$\psi:S\mapsto\{[a]\mid a\in S\}\mid a\mapsto[a]$$

与

$$\phi:\{[a]\mid a\in S\}\mapsto S\mid[a]\mapsto a$$

均为保序的，根据 1) 和 2), S 为 N-M 序半群. □

读者可以讨论上面存在的序是否惟一.

类似 M 半群的定义，一个乘格 L 称为 M 格如果 L 满足：$\forall a,b\in L$, $a\leq b$, 则存在 $c\in L$ 使得 $a=bc$.

对序半群 S，如果 $L(S)$ 为 M 格，$a, b \in S$ 且 $a \le b$，则 $(a] \subseteq (b]$，存在 $K \in L(S)$ 使得 $(a] = (bK]$，即存在 $c \in K \subseteq S$ 使得 $a = bc$，故 S 为 M 半群，反之不一定成立. 反例如下.

设 $\mathbf{Z}^+$ 为正整数集，$a, b \in \mathbf{Z}^+$，定义 $a \le b \Leftrightarrow b|a$. 则 $\mathbf{Z}^+$ 关于数通常乘法和 "$\le$" 构成 M 半群. 但 $L(S)$ 关于运算 "$\circ$"

$$(\forall A, B \in L(S)) \quad A \circ B = \{x \in S \mid x \le ab, a \in A, b \in B\}$$

不是 M 格. 因为 $(6] \cup (35] \subseteq (3] \cup (7]$，如果 $L(S)$ 为 M 格，存在 $A \in L(S)$ 使得

$$(6] \cup (36] = (3] \circ A \cup (7] \circ A,$$

存在 $a \in A$ 使得 $6 \le 3 \circ a$，如果 $a = 1$，则 $(6] \cup (36] \supset (3] \cup (7]$，矛盾. 如果 $a = 2$，则 $14 \in (7] \circ A \subseteq (6] \cup (35]$. 因为 $14 \notin (6] \cup (35]$，矛盾. 故 A 不存在.

定理 4.1.7 设 S 为负序的且带有单位元，则下列各款等价：

1) S 为 M 半群；

2) $(\forall B \in L(S))\ (\forall a \in S)\ (B : (a]) \circ (a] = B \cap (a]$；

3) 设 $a \in S$，$f_a : L(S) \mapsto L(S) \mid B \mapsto B \circ (a]$，则存在 $L(S)$ 到 $L(S)$ 的映射 f_a^+ 使得

$$f_a^+ \circ f_a \ge 1_{L(S)}, \quad f_a \circ f_a^+ \le 1_{L(S)},$$
$$f_a(f_a^+(B)) = B \cap f_a(1), \forall B \in L(S).$$

证明 1)$\Longrightarrow$2) 设 S 为 N-M 序半群，显然

$$(B : (a]) \circ (a] \subseteq (a], \forall a \in S, \forall B \in L(S).$$

由剩余的定义，$(B : (a]) \circ (a] \subseteq (B]$，从而

$$(B : (a]) \circ (a] \subseteq (a] \cap (B].$$

设 $x \in B \cap (a]$, 存在 $b \in B$ 使得 $x \leq b \leq a$. 因为 S 为 M 半群，存在 $c \in S$ 使得 $x \leq b = ca \leq a$, 所以 $c \in B : (a]$. 事实上， $B : (a]$ 是满足 $x \circ (a] \subseteq B$ 的最大子集，因为 $c \circ (a] \subseteq B$, 所以 $(c] \subseteq B : (a]$. 又因为 $x \leq ca$, 所以 $x \in (B : (a]) \circ (a]$.

2) $\Longrightarrow$ 1) 设 $a, b \in S$ 且 $a \leq b$, 则 $(a] \subseteq (b]$, 即 $(a] = (a] \cap (b] = ((a] : (b]) \circ (b]$. 存在 $x \in (a] : (b]$, $t \in (b]$ 使得 $a \leq xt \leq xb \leq a$. 因此 $a = xb$.

2)$\Longrightarrow$3) 定义 $f_a^+ : L(S) \mapsto L(S) \mid B \mapsto B : (a]$, 则

$$f_a^+ \circ f_a(B) = f_a^+(B \circ (a]) = B \circ (a] : (a] \supseteq B;$$

$$f_a \circ f_a^+(B) = f_a(B : (a]) = (B : (a]) \circ (a] = B \cap (a] \subseteq B.$$

故 $f_a^+ \circ f_a \geq 1_{L(S)}$, $f_a \circ f_a^+ \leq 1_{L(S)}$ 且

$$f_a(f_a^+(B)) = B \cap (a] = B \cap f_a(1).$$

这里 1 表示格 $L(S)$ 的最大元，即 $(1]$.

3)$\Longrightarrow$ 2) 因为 S 为负序半群，得

$$(B : (a]) \circ (a] \subseteq B \cap (a], \quad \forall B \in L(S), a \in S.$$

由假设，设 $f_a^+(B) = K$, 则

$$f_a(f_a^+(B)) = K \circ (a] = B \cap (a],$$

且 $f_a^+(f_a(B)) = f_a^+(B \circ (a])$. 由 $K \circ (a] = B \cap (a]$ 得出 $K \subseteq B : (a]$, 所以

$$f_a^+(B) \subseteq B : (a], \forall B \in L(S).$$

故 $B \cap (a] = f_a \circ f_a^+(B) \subseteq f_a^+(f_a(B)) \subseteq (B \circ (a]) : (a]$. □

定义 4.1.8 一个剩余乘格 $(L, \wedge, \vee)$ 的元素 M 称为 Dilworth 元，如果 M 满足

$$(\forall A, B \in L) \qquad (A \wedge (B : M))M = AM \wedge B,$$
$$(A \vee BM) : M = (A : M) \vee B.$$

定义 4.1.9 一个序半群 S 称为 0 可消去的，如果

$$(\forall x, y, a \in S) \ \ xa = ya \neq 0 \Rightarrow x = y.$$

定理 4.1.10 设 S 为 N-M 序半群，则下列各款等价：
1) S 为 0 可消去的；
2) $(\forall a \in S)$ $(\forall B \in L(S))$ $(B \circ (a]) : (a] = B \cup (0 : (a])$；
3) $\forall a \in S$，设 f_a 为 $L(S)$ 到 $L(S)$ 的映射，定义如下：

$$f_a : L(S) \mapsto L(S) \mid B \mapsto B \circ (a], \forall B \in L(S).$$

则存在 $L(S)$ 到 $L(S)$ 的映射 f_a^+ 使得

$$f_a^+ \circ f_a \geq 1_{L(S)}, \quad f_a \circ f_a^+ \leq 1_{L(S)},$$
$$f_a^+ \circ f_a(a) = a \vee f_a^+(0).$$

证明 1) $\Longrightarrow$2) 显然 $B \subseteq (B \circ (a]) : (a]$. 因 $(0] \subseteq B \circ (a]$，所以 $(0 : (a]) \subseteq (B \circ (a]) : (a]$，因此

$$B \cup (0 : (a]) \subseteq (B \circ (a]) : (a].$$

设 $x \in (B \circ (a]) : (a]$，则存在 $b \in B, y \in (a]$ 使得 $xa \leq by \leq ba$. 又 S 为 M 半群，存在 $c \in S$ 使得 $xa = c(ba)$. 如果 $xa \neq 0$，则由 S 的 0 可消性得 $x = cb \leq b \in B$. 如果 $xa = 0$，

则 $x \in 0:(a]$, 因此

$$(B \circ (a]) : (a] \subseteq B \cup (0:(a]).$$

2)$\Longrightarrow$ 1) 设 $xa = ya \neq 0$, 因为

$$(xa] : (a] = ((x] \circ (a]) : (a] = (x] \cup (0:(a]);$$

类似地有

$$((y] \circ (a]) : (a] = (y] \cup (0:(a]).$$

因为 $xa \neq 0$, 所以 $x \notin o:(a]$, 只有 $x \in (y]$; 同理可证 $y \in (x]$, 即 $x = y$.

2)$\Longrightarrow$3) 定义 f_a^+ 和定理 4.1.7 一致，则

$$f_a^+ \circ f_a \geq 1_{L(S)}, \quad f_a \circ f_a^+(B) = (B:(a]) \circ (a] \subseteq B.$$

事实上，$\forall y \in (B:(a]) \circ (a]$, 存在 $k \in B:(a]$, $c \in (a]$ 使得

$$y \leq kc \leq ka \in B,$$

即 $y \in (B] = B$. 进一步地由 $f_a^+(0) = 0:(a]$ 得出

$$f_a^+ \circ f_a(B) = (B \circ (a]) : (a] = B \cup (0:(a]) = B \vee f_a^+(0).$$

3)$\Longrightarrow$2) 显然 $B \cup (0:(a]) \subseteq (B \circ (a]) : (a]$. 设

$$f_a^+(B) = B:(a], \forall B \in L(S),$$

则由

$$f_a^+ \circ f_a(B) = (B \circ (a]) : (a] = B \cup f_a^+(B) = B \cup (0:(a])$$

得 2) 成立. □

下面我们给出 $L(S)$ 中 Dilworth 元素刻画的一些定理.

定理 4.1.11 设 S 为带单位元的 N 序半群，则 $L(S)$ 的每个 Dilworth 元为 S 的主序理想.

为了证明该定理，我们需要两个引理.

引理 4.1.12 设 $(L,\wedge,\vee)$ 是模格且是剩余乘格. L 的元素 E 是 Dilworth 元当且仅当 $\forall B\in L$,

1) $B\wedge E=(B:E)E$;

2) $(BE):E=B\vee(0:E)$.

证明参见 Michigan Math. J.,16(1969), 215—223. □

引理 4.1.13 设 S 是 N 序半群，D 为 $L(S)$ 的 Dilworth 元，则

$$(\forall A_\alpha\in L(S))\ (\bigcup_\alpha A_\alpha):D=\bigcup_\alpha(A_\alpha:D).$$

证明 设 $A=\bigcup\limits_\alpha A_\alpha$, $A:D$ 存在，由引理 4.1.12 ,

$$\begin{aligned}A:D&=(A\cap D):D=(\bigcup_\alpha(A_\alpha\cap D)):D\\&=(\bigcup_\alpha(A_\alpha:D)D):D=((\bigcup_\alpha(A_\alpha:D))D):D\\&=[\bigcup_\alpha(A_\alpha:D)]\cup(0:D)=\bigcup_\alpha(A_\alpha:D).\end{aligned}$$

□

定理 4.1.11 的证明 因为 S 有单位元，故 $S\in L(S)$, 而且为其单位元且是 $L(S)$ 的最大元. 设 D 为 $L(S)$ 的 Dilworth 元，则 $D=\bigcup\limits_{d\in D}(d]$, 且由引理 4.1.13,

$$S=(\bigcup_{d\in D}(d]):D=\bigcup_{d\in D}((d]:D),$$

因此存在 $d_o\in D$ 使得 $1\in(d_o]:D$, 由此得出 $D=(d_o]$. □

综合上述三个主要定理，我们得出

定理 4.1.14 设 S 是 N 序半群且带单位元. S 的主序理想和 $L(S)$ 的 Dilworth 元一致当且仅当 S 是 0 可消去的 M 半群.

在上述定理中 0 可消去性是必不可少的，我们有一些反例.

例 4.1.15 设 $S=\{a,b,c,d,e\}$, S 上的乘法运算和二元关系 (覆盖序关系) 定义如下：

·	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	a	b	b	b	b
c	a	b	c	b	c
d	a	b	b	d	d
f	a	b	c	d	e

$$<:=\{(a,b),(b,c),(b,d),(c,e),(d,e)\}.$$

则 $(S,\cdot,\leq)$ 是一个负序半群且不是 0 可消去的， $(b]=\{a,b\}$ 是 S 的主理想，但

$$((d]\circ(b]):(b]=S\neq(d]\cup(a:(b])=(d].$$

因此， $(b]$ 不为 Dilworth 元. □

一个序半群一旦为 N 半群，则 S 的理想和 $L(S)$ 一致，这样通过 S 的理想性质来刻画 S 的结构变得更特殊一些，特别是可以充分利用格和半格中的一些性质.

§2 P-Q 序半群

和 N-M 序半群对偶，本节我们讨论正序半群 (P 序半群) 和 Q 半群.

本节中 S 均为可换序半群. S 称为 Q 半群，如果 $a, b \in S, a \leq b$, 则 $a = b$ 或存在 $c \in S$ 使得 $b = ac$. 正序 Q 半群称为 P-Q 序半群. 例如自然数集 $\mathbf{Z}^+$ 关于普通数乘及整除关系，即 $a \leq b \Leftrightarrow a|b, \forall a, b \in \mathbf{Z}^+$ 构成 P-Q 序半群. 设 $a, b \in S$, 记 $\overline{a : b} = \{x \in S \mid bx \geq a\}$, $MI(S)$ 为 S 的关于半群结构的全体理想集，$I_a = a \cup aS$, 则

定理 4.2.1 设 $(S, \cdot, \leq)$ 是序半群，则下列各款是等价的：

1) S 为 P 序半群；

2) 映射 $\psi : \{I_a \mid a \in S\} \mapsto S \mid I_a \mapsto a, \forall a \in S$ 是反保序的且 S 的任一半群结构的 $\mathcal{J}$ 类仅含一个元素；

3) $\forall a \in S, [a)$ 为 S 的理想且 $[a) \supset I_a$. □

证明可以仿第一节有关结论给出.

命题 4.2.2 设 S 为 P 序半群 (没有 0 元), $E(S) \neq \emptyset$, 则 e 在 E 中极大当且仅当 e 是本原的.

证明 设 e 在 E 中极大，$f \in E(S)$ 且 $ef = fe = f$, 则 $f \geq e$, 由 e 极大得 $e = f$. 反之，如果 e 是本原幂等元，$f \geq e, f \in E$, 则 $f^2 = f \geq ef \geq f$, 故 $f = ef = fe$. 因为 e 是本原的，所以 $f = e$. □

命题 4.2.3 设 S 为 P 序半群，则下列各款成立：

1) 如果 $(S, \cdot)$ 是正则的，则 S 为带；

2) 如果 S 为链且 S 中有单位元 e, e 在 $(S, \leq)$ 中极大，则 $S = \{e\}$;

3) 如果 $(S, \leq)$ 关于理想集 $MI(S)$ 满足降链条件，则 S 为

周期半群;

4) 如果 S 为全序带, 则 S 为 P 序半群当且仅当 $ab = \max\{a,b\}, \forall a,b \in S$;

5) $\forall a \in S$, $[a)$ 为 $(S,\cdot)$ 的素理想当且仅当 $[a) = \overline{a:b}, \forall b \in S, b \not\geq a$.

证明 1) $(\forall a \in S)$ $(\exists x \in S)$ $a = axa$. 又 S 为 P 序半群, 因此 $a = axa \geq a^2 \geq a$, 即 $a = a^2$.

2) 设 $a,b \in S$, 则 $e \geq ab \geq a,b$. 又 $a = ae \geq a^2$, $a^2 \geq a$, 因此 $a^2 = a$, 从而 $a = ae \geq a^2b = ab \geq a$, 故 $ab = a$, 同理可导出 $ab = b$, 从而 $a = b$.

3) 设 $a \in S$, 因为

$$\cdots \subseteq I_{a^n} \subseteq \cdots \subseteq I_{a^2} \subseteq I_a,$$

由已知及定理 4.2.1, 存在 $m \in \mathbf{Z}^+$ 使得 $I_{a^m} = I_{a^{m+1}} = \cdots$, 即 $a^m = a^{m+1} = \cdots$.

4) 设 $a,b \in S$, 则 $a \leq b$ 或 $b \leq a$, 设 $a \leq b$, 那么 $b \leq ab \leq b^2 = b$, 因此

$$ab = b = \max\{a,b\}.$$

5) 设 $[a)$ 为 $(S,\cdot)$ 的素理想且 $b \not\geq a$. $\forall x \in [a)$, 则 $x \geq a$, 从而 $xb \geq ab \geq a$, 即 $x \in \overline{a:b}$. 又设 $t \in \overline{a:b}$, 则 $bt \geq a$, 即 $bt \in [a)$, 故 $t \in [a)$.

反之, 如果 $[a) = \overline{a:b}, \forall b \not\geq a$. 设 $xy \in [a)$, 如果 $x \notin [a)$, 则 $x \not\geq a$, 由 $[a) = \overline{a:x}$ 推出 $y \in [a)$. □

下面我们讨论 P-Q 序半群的有关性质.

定理 4.2.4 设 S 为序半群, 则下列各款成立:

1) S 为 Q 半群当且仅当 S 到 $(S,\cdot)$ 的主理想集的映射

$\psi : a \mapsto I_a, \forall a \in S$ 是反保序的;

2) S 为 Q 半群当且仅当 $[a) \subseteq I_a, \forall a \in S$;

3) S 为 P-Q 序半群当且仅当 $(S, \cdot)$ 的任一主理想 $I_a, \forall a \in S$ 均为 $[a)$ 形式;

4) $(S, \cdot)$ 上存在关系 "$\leq_1$" 使得 $(S, \cdot, \leq_1)$ 为 PQ 序半群当且仅当 S 满足

$$(\forall a, b \in S)\ I_a = I_b \Leftrightarrow a = b.$$

读者可参照定理 4.1.6 给出证明.

定理 4.2.5 设 $(S^o, \cdot, \leq)$ 是 P-Q 序半群, 则

1) S^o 是 0 可消去的当且仅当

$$(\forall a, b \in S)\ [b) \cup (\overline{0 : a}) = \overline{ab : a};$$

2) S^o 是可消去的当且仅当 S^o 为 0 可消去的且 $0 : a = \{0\}, \forall a \in S$.

证明 1) 显然 $[b) \cup (\overline{0 : a}) \subseteq \overline{ab : a}$. 设 $x \in \overline{ab : a}$, 则 $ax \geq ab$. 因为 S^o 为 Q 半群, 存在 $y \in S^o$ 使得 $ax = aby$. 如果 $ax = 0$, 则 $x \in (\overline{0 : a}) \subseteq [b) \cup (\overline{0 : a})$; 如果 $ax \neq 0$, 由假设 $x = by \geq b$, 所以 $x \in [b)$.

反之, 设 $x, a, b \in S$ 且 $ax = ab \neq 0$, 那么 $xa \geq ab$, $x \in \overline{ab : a} = [b) \cup (\overline{0 : a})$. 又从 $ab \geq ax$ 得出 $b \in (\overline{ax : a}) = [x) \cup (\overline{0 : a})$. 因为 0 在 P- 序半群中是最大元, 由假设 $ax = ab \neq 0$, 故 $x \in [b), b \in [x)$, 即 $b = x$.

2) 设 S^o 是可消去的, 当然是 0 可消去的. $\forall x \in 0 : a$, 那么 $ax = 0 = a0$, 因此 $x = 0$. 反之, 设 $ax = ay \neq 0$, 由已知 $x = y$; 如果 $ax = ay = 0$, 因为 $0 : a = \{0\}$, 所以 $x = y = 0$. □

命题 4.2.6 设 S 为 P-Q 序半群, 则下列各款成立:

1) $(\forall a,b\in S)\ [a)\cap[b)=a(\overline{b:a})$;

2) 假设 $a\in S$, $[a)$ 为 $(S,\cdot)$ 的素理想, 那么 S 中每个非零元的阶是无限的.

证明 1) 设 $x\in[a)\cap[b)$, 则 $x\geq a,b$, 存在 $y\in S$ 使得 $x=ay\geq b$, 因此 $x\in a(\overline{b:a})$. 反之, 设 $t\in a(\overline{b:a})$, 则存在 $v\in\overline{b:a}$ 使得 $t=av\geq a,b$, 即 $t\in[a)\cap[b)$.

2) 如果 $a\in S$, 存在最小的 $n\in Z^+$ 使得 $a^n=a^{n+k}$, $\forall k\geq 0$. 取

$$k=q(n-1)+r,\quad q\geq 0,0<r<n-1,$$

那么

$$\begin{aligned} a^n &= a^{n+k}=a^{n+q(n-1)+r}=a^{(q+1)(n-1)+r+1}\\ &= a^{q(n-1)+r+1}a^{n-1}. \end{aligned}$$

因为 S 为 P 序半群, 所以 $a^n\geq a^{q(n-1)+r+1}$. 又因为 $a^n\in[a^n)$ 且 $a^{n-1}\notin[a^n)$, 因为 $[a^n)$ 为 $(S,\cdot)$ 的素理想, 所以 $a^{q(n-1)+r+1}\in[a^n)$, 因此 $a^n=a^{q(n-1)+r+1}$. 重复以上过程, 得 $a^n=a^{r+1}$, 而 $r+1<n$, 这和 n 的选择矛盾. 故 $o(a)=\infty$. □

设 $S=[0,1)$, S 关于整除关系, 即 $a\leq b\Leftrightarrow$ 存在 $x\in S$ 使得 $b=ax$ 和普通乘法构成 P-Q 半群. 而且 $\forall x\in(0,1)$, $x^m\neq x^n$, $m\neq n$. 但是 $[0,\frac{1}{2}]\subseteq[0,1)$ 为 $(S,\cdot)$ 的理想, $(\frac{2}{3})^2\in[0,\frac{1}{2}]$, 但 $\frac{2}{3}\notin[0,\frac{1}{2}]$, 所以 $[0,\frac{1}{2}]$ 不是 S 的完全素理想. 其实

$$\begin{aligned} [\frac{1}{2},1): &= \{x\in S\mid x\geq\frac{1}{2}\}\\ &= \{x\in S\mid(\exists a\in S)\ x\\ &= \frac{1}{2}a\}\cup\{\frac{1}{2}\}=[0,\frac{1}{2}]. \end{aligned}$$

这说明上定理中 2) 的逆是不成立的.

§3 蕴涵半群

蕴涵半群 (implicative semigroup) 是根据蕴涵半格的研究思想由 Chan 和 Shum[19] 在 1993 年提出的，本节主要讨论蕴涵半群的同态和滤子性质.

一个 N 序半群 $(S,\cdot,\leq)$ 称为蕴涵半群，如果 S 上还有一个二元运算 “$*$” 满足

$$(\forall x,y,z\in S)\ \ z\leq x*y\Leftrightarrow zx\leq y.$$

在蕴涵半群 $(S,\cdot,\leq,*)$ 中，$\forall x,y\in S$, $x^2\leq x$, 则 $x\leq x*x$. 又 $(x*x)y\leq y$, 从而 $x*x\leq y*y$. 对称地， $y*y\leq x*x$, 因此， $x*x=y*y$ 为 S 中的最大元 (表示为 1).

例 4.3.1 设 $S=\{1,a,0\}$, S 关于下列的乘法 “$\cdot$” 和二元关系 “$\leq$” 为负序半群.

·	1	a	0
1	0	0	0
a	0	0	0
0	0	0	0

$$\leq:=\{(0,a),(0,1),(a,1)\}.$$

定义 S 上的另一二元运算 “$*$” 为

$$(\forall x,y\in S)\ \ x*y=1.$$

$(S,\cdot,\leq,*)$ 为蕴涵半群且 1 不为 S 的单位元.

例 4.3.2 设 $S=\{1,a,b,0\}$, S 上的乘法运算和二元关系定义如下：

·	1	a	b	0
1	1	a	b	0
a	a	0	0	0
b	b	0	b	0
0	0	0	0	0

$$\leq := \{(0,a),(0,b),(0,1),(a,1),(b,1)\}.$$

则 $(S,\cdot,\leq)$ 为 N 序半群. 如果 S 为蕴涵半群, 则存在 S 上的二元运算 "$*$" 使得

$$z \leq x * y \Leftrightarrow zx \leq y.$$

因为 $a^2 = 0 < b$; $ba = 0 < b$, 因此 $a \leq a * b, b \leq a * b$, 只有 $a * b = 1$, 故 $1a = a \leq b$, 矛盾. 这说明 S 不是蕴涵半群且有单位元.

以下我们总考虑最大元 1 也为单位元的蕴涵半群.

命题 4.3.3 设 S 为蕴涵半群, 则 $\forall x, y, z \in S$, 下列各款成立:

1) $x \leq 1, x * x = 1, x = 1 * x$;
2) $x \leq x * x^2$;
3) $x \leq y * x$;
4) 如果 $x \leq y$, 则 $x * z \geq y * z, z * x \leq z * y$;
5) $x \leq y \Leftrightarrow x * y = 1$;
6) $x * (y * z) = (xy) * z$;
7) $x \leq y * (xy)$;
8) 如果 S 可换, 则 $x * y \leq sx * sy, \forall s \in S$.

证明 由定义我们可以容易推出 1), 2) 和 3).

4) 因为 $y * z \leq y * z$, 所以 $(y * z)y \leq z$. 因为 $x \leq y$, 因此 $(y * z)x \leq (y * z)y \leq z$, 即 $y * z \leq x * z$. 类似方法可得 $z * x \leq z * y$.

5) 设 $x \le y$, 由 4), $1 = x * x \le x * y$, 因此 $x * y = 1$. 反之, 如果 $x * y = 1$, $1 \le x * y$, 因此 $1x = x \le y$.

6) 令 $u = x * (y * z)$, $t = (xy) * z$, 则 $ux \le y * z$, 进一步地, $u(xy) \le z$, 即 $u \le (xy) * z = t$. 反之, 由 $t(xy) \le z$ 得出 $t \le x * (y * z) = u$.

7) 由 5) 和 6), 因为 $x * (y * (xy)) = xy * xy = 1$, 所以 $x \le y * (xy)$.

8) 令 $t = (x * y) * (sx * sy)$, $u = x * y$, 则 $ux \le y$ 且 $t = ((x * y)sx) * sy$. 又 $usx \le sy$, 因此

$$t = usx * sy \ge sy * sy = 1.$$

故 $t = 1$. 由 5) 得 $x * y \le sx * sy$. □

定义 4.3.4 设 $(S, \cdot, \le, *)$ 和 $(S', \circ, \le, *)$ 是两个蕴涵半群; 如果 S 到 S' 的映射 α 满足

$$(\forall x, y \in S) \quad \alpha(x * y) = \alpha(x) * \alpha(y),$$

α 称为 S 到 S' 的蕴涵同态映射.

定理 4.3.5 设 $(S, \cdot, \le, *)$ 和 $(S', \circ, \le, *)$ 是两个蕴涵半群, α 为 S 到 S' 的满蕴涵同态. 则下列各款成立:

1) $\alpha(1) = 1'$, S' 的最大元及乘法单位元;

2) α 是保序的;

3) α 是半群同态;

4) $F = \alpha^{-1}(1')$ 为 S 的滤子;

5) α 是半群同构当且仅当 $F = \alpha^{-1}(1') = \{1\}$.

证明 根据命题 4.3.3 , 1) 和 2) 显然.

3) 设 $x, y \in S$, 因为 α 为满射, 所以存在 $z \in S$ 使得 $\alpha(z) = \alpha(x) \circ \alpha(y)$.

$$\begin{aligned}
&\alpha(xy) * \alpha(z) = \alpha(xy * z) = \alpha(x * (y * z)) \\
= &\alpha(x) * \alpha(y * z) = \alpha(x) * [\alpha(y) * \alpha(z)] \\
= &[\alpha(x) \circ \alpha(y)] * \alpha(z) = \alpha(z) \circ \alpha(z) = 1,
\end{aligned}$$

故 $\alpha(xy) \leq \alpha(x) \circ \alpha(y) = \alpha(z)$.

另一方面，因为

$$\alpha(y) * \alpha(xy) = \alpha(y * (xy)),$$

由命题 4.3.3(7)，$x \leq y * (xy)$，所以 $\alpha(x) \leq \alpha(y * (xy))$，即 $\alpha(x) \leq \alpha(y) * \alpha(xy)$，也即 $\alpha(x)\alpha(y) \leq \alpha(xy)$.

4) 由 2) 和 3) 可容易推出.

5) 如果 α 是半群同构，显然 $F = \{1\}$. 反之，如果 $F = \{1\}$，$\alpha(x) = \alpha(y)$，则

$$\alpha(x * y) = \alpha(x) * \alpha(y) = 1' \Rightarrow x * y \in F \Rightarrow x * y = 1 \Rightarrow x \leq y.$$

类似地，从 $\alpha(y * x) = 1'$ 得出 $y \leq x$. 因此 $x = y$. □

我们这里给出滤子的一个刻画.

定理 4.3.6 设 S 为蕴涵半群，S 的非空子集 F 为 S 的滤子当且仅当 i) $1 \in F$, ii) $x * y \in F$ 且 $x \in F$，则 $y \in F$.

证明 设 F 为 S 的滤子，显然 $1 \in F$；设 $x * y \in F, x \in F$，则 $(x * y)x \in F$，又 $(x * y)x \leq y$，从而 $y \in F$. 反之，设 $xy \in F$，因为 $x, y \geq xy$，所以 $x, y \in F$；又设 $x \in F$，$y \in F$，因为 $x \leq y * (xy)$，所以 $y * (xy) \in F$，由假设 $xy \in F$. 又设 $x \in F$，$x \leq y$，由 $x * y = 1 \in F$ 及假设得 $y \in F$. □

下面我们讨论可换蕴涵半群，即 $xy = yx, \forall x, y \in S$.

引理 4.3.7 设 $(S,\cdot,\leq,*)$ 为可换蕴涵半群， F 为 S 的滤子. 定义 S 上的二元关系 $\rho:(x,y)\in\rho\Leftrightarrow(\exists c\in F)\ cx\leq y, cy\leq x$. 则 ρ 为 S 上的凸同余关系.

证明 容易验证 ρ 为 S 上的同余关系. 设 $x\leq y\leq z$ 且 $x\rho z$, 存在 c 使得 $cx\leq z, cz\leq x$. 因此 $cy\leq cz\leq x, cx\leq x\leq y$, 故 $(x,y)\in\rho$. □

引理 4.3.8 设 S 和 ρ 与上定义一致，则 S/ρ 也为可换蕴涵半群.

证明 设 $(S,\cdot,\leq,*)$ 为可换蕴涵半群，则 $(S/\rho,\cdot)$ 为可换半群，在 S/ρ 上定义二元关系如下：

$$\preceq:\ =\ \{((x)_\rho,(y)_\rho)\in S/\rho\times S/\rho\mid(\forall a\in(x)_\rho)\ (\forall b\in(y)_\rho)\ (\exists c\in F)\ ca\leq b\}.$$

则可验证 $(S/\rho,\cdot,\preceq)$ 为可换 N 序半群. $\forall(x)_\rho,(y)_\rho\in S/\rho$, 定义 $(x)_\rho*(y)_\rho:=(x*y)_\rho$, 我们可以验证这个定义是可行的，即设 $(x_1,x)\in\rho,(y_1,y)\in\rho$ ，则 $(x*y)_\rho=(x_1*y_1)_\rho$. 设 $(z)_\rho(x)_\rho\preceq(y)_\rho$, 则 $\forall z_1\in(z)_\rho,x_1\in(x)_\rho,y_1\in(y)_\rho$, 存在 $c\in F$ 使得 $cz_1x_1\leq y_1$, 即 $cz_1\leq x_1*y_1$, $(z)_\rho\preceq(x_1*y_1)_\rho=(x*y)_\rho=(x)_\rho*(y)_\rho$. 故 $(S/\rho,\cdot,\preceq,*)$ 为可换的蕴涵半群，显然 $(S,\cdot,\leq,*)$ 和 $(S/\rho,\cdot,\preceq,*)$ 是同态的. □

平行于一般代数系统的同态定理，我们给出蕴涵半群的同态基本定理.

定理 4.3.9 设 α 为可换蕴涵半群 $(S,\cdot,\leq,*)$ 到 $(S',\cdot,\leq,*)$ 的蕴涵满同态映射. 设 β 为 S 到 $(S/\rho,\cdot,\preceq,*)$ 的自然蕴涵满同态映射且 $\mathrm{Ker}\beta\subseteq\mathrm{Ker}\alpha$, 则存在 $(S/\rho,\cdot,\preceq,*)$ 到 $(S',\cdot,\leq,*)$ 的满蕴涵同态 γ 使得 $\alpha=\gamma\circ\beta$. 而且，如果 $\mathrm{Ker}\beta=\alpha^{-1}(1')$, 则 γ 是蕴涵同构映射.

证明 我们仅仅证最后情况，设 $\mathrm{Ker}\beta=\alpha^{-1}(1')$, 设 $\alpha(x)=$

$\alpha(y)$, 则 $\alpha(x*y)=1'$, 因此 $x*y\in\alpha^{-1}(1')=\mathrm{Ker}\beta$. 类似地 $y*x\in\mathrm{Ker}\beta$. 令 $c=x*y, d=y*x$, 则 $cx\leq y, dy\leq x$. 因此 $(cd)x\leq y, (cd)y\leq x$, 故 $(x)_\rho=(y)_\rho$, 这就证得 γ 是单射. □

本节最后我们讨论可换蕴涵半群滤子的生成问题.

命题 4.3.10 设 A 为可换蕴涵半群 S 的非空子集, 则 A 生成的滤子 $<A>$ 为

$$\{x\in S\mid a_n*(\cdots*(a_1*x)\cdots)=1, a_1,a_2,\cdots,a_n\in A\}.$$

证明 令

$$B=\{x\in S\mid a_n*(\cdots*(a_1*x)\cdots)=1, a_1,a_2,\cdots,a_n\in A\}.$$

则 B 为 S 的滤子. 设 $x\in B, y\geq x$, 则存在 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in A$ 使得

$$a_n*(\cdots*(a_1*x)\cdots)=1.$$

由命题 4.3.3,

$$1=a_n*(\cdots*(a_1*x)\cdots)\leq a_n*(\cdots*(a_1*y)\cdots)\leq 1,$$

故 $y\in B$. 又设 $x\in B, y\in B$, 由 $x\leq y*(xy)$ 得 $y*(xy)\in B$, 存在 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in B$ 使得

$$a_n*(\cdots*(a_1*(y*(xy)))*\cdots)=1.$$

因为 S 可换, 所以 $\forall a,b,c\in S$, $a*(b*c)=b*(a*c)$. 因此由上式得

$$y*(a_n*(\cdots*(a_1*(xy))*\cdots)=1,$$

即 $y\leq a_n*(\cdots*(a_1*(xy))*\cdots)$. 又 $y\in B$, 存在 $b_1,b_2,\cdots,b_m\in S$ 使得

$$b_m*(\cdots*(b_1*y)*\cdots)=1.$$

因此

$$\begin{aligned}1 &= b_m * (\cdots * (b_1 * y) * \cdots)\\ &\leq b_m * (\cdots * (b_1 * (a_n * (\cdots * (a_1 * (xy)) * \cdots))) \cdots) \leq 1.\end{aligned}$$

故 $xy \in B$. 又 $\forall a \in A$, $a * a = 1$, 所以 $a \in B$.

又设 F 为 S 包含 A 的滤子,设 $x \in B$, 存在 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in A \subseteq F$ 使得

$$a_n * (\cdots * (a_1 * x) \cdots) = 1 \in F,$$

故

$$a_n \cdot (a_n * (\cdots * (a_1 * x) \cdots))) \in F.$$

因为

$$a_n \cdot (a_n * (\cdots * (a_1 * x) \cdots))) \leq a_{n-1} * (\cdots (a_1 * x) \cdots),$$

所以 $a_{n-1} * (\cdots (a_1 * x) \cdots) \in F$, 重复以上过程我们得出 $x \in F$, 即 B 为包含 A 的 S 的最小滤子. □

为了方便起见, 在 $a_n * (\cdots * (a_1 * x) \cdots)$ 这表达式中, 当 $a = a_1 = a_2 = \cdots a_n$ 时, 记为 $a *^n x$. 不难从上定理看出 $\forall a \in S$, $< a >= \{x \in S \mid a *^n x = 1, n \in \mathbf{Z}^+\}$.

定理 4.3.11 设 F 为可换蕴涵半群 S 的非空子集, 则 F 是滤子当且仅当

$$(\forall u, v \in F)\ (\forall x \in S)\ v * (u * x) \in F \Rightarrow x \in F.$$

证明 由命题 4.3.10, 设 F 为滤子, 则

$$\begin{aligned}x &\in < F >= F\\ &= \{y \in S \mid a_n * (\cdots * (a_1 * x) \cdots) = 1, a_1, a_2, \cdots, a_n \in F\}.\end{aligned}$$

反之, 设 $a \in F$, 则 $a*(a*1)=1$, 由假设 $1 \in F$, 设 $x \in F, x \leq y$, 则 $1*(x*y)=1*1=1$, 故 $y \in F$. 又设 $x, y \in F$, 则 $x*(y*(xy))=1$. 因此 $xy \in F$. □

命题 4.3.12 设 S 为可换蕴涵半群, F 为 S 的滤子且 $a \in S$, 则

$$< F \cup \{a\} >= \{x \in S \mid a *^n x \in F, n \in \mathbf{Z}^+\}.$$

证明 令 $B=\{x \in S \mid a *^n x \in F, n \in \mathbf{Z}^+\}$. 则 B 为滤子. 事实上, 设 $x \in B, x \leq y$, 则 $a *^n x = u \in F$, 因此

$$a *^n (u*x) = u*(a *^n x) = u*u = 1 \in F.$$

又 $a *^n (u*x) \leq a *^n (u*y)$, 所以 $a *^n (u*y) = 1 = u*(a *^n y)$, 即 $u \leq a *^n y$, 推出 $a *^n y \in F$, 从而 $y \in B$. 假设 $x, y \in B$, 存在 $n \in Z^+$ 使得 $a *^n x \in F$, 从而由

$$a *^n x \leq a *^n (y*(xy))$$

得 $u = a *^n (y*(xy)) = y*(a *^n (xy)) \in F$, 且

$$\begin{aligned} & u*[y*(a *^n (xy))] = 1 = y*(a *^n (u*(xy))) \\ \Rightarrow \quad & y \leq a *^n (u*(xy)). \end{aligned}$$

又 $y \in B$, 存在 $m \in \mathbf{Z}^+$ 使得 $a *^m y = v \in F$, 我们有

$$\begin{aligned} 1 \quad = \quad & v*v = v*(a *^m y) = a *^m (v*y) \\ & \leq a *^m (v*(a *^n (u*(xy)))) = v*(u*(a *^{m+n} (xy))). \end{aligned}$$

由定理 4.3.10 , $a *^{m+n} (xy) \in F$, 即 $xy \in B$.

设 A 为包含 F 和 $\{a\}$ 的 S 的滤子. 设 $x \in B$, 存在 $n \in \mathbf{Z}^+$ 使得 $a *^n x \in F \subseteq A$, 则

$$a*(a *^{n-1} x)a \in A \Rightarrow a*(a *^{n-1} x)a \leq a *^{n-1} x \in A.$$

重复以上过程可得 $a * x \in A$. 又 $a(a * x) \leq x$, 故 $x \in A$, 因此 $B \subseteq F$.

第五章　格序半群

本章所论及的几类格序半群是所有格序半群研究中最基本的几类. 它们代表了特殊类格序半群研究的基本方法. 其他类格序半群, 如 Artin l 半群、可除 l 半群、具有吸收性的 l 半群、右格序半群、戴德金格序群、 Brouwierian 格序半群、格序群胚等读者可参见 [56—71] 等.

§1　sl 理想与格序同余

设 S 为格序半群 (l 半群), 如果 S 是分配的, 我们也简称为 dl 半群, 在第二章我们已经知道 S 的格序同余 (l 同余) 格 $LC(S)$ 是完备格. 本节我们主要讨论格序半群的 sl 理想和 l 同余之间的关系, 主要结果来自 [72].

设 $\emptyset \neq I \subseteq S$, I 称为 S 的 s 理想, 如果 I 为 S 的关于半群结构 $(S,\cdot)$ 的理想; I 称为 S 的 l 理想, 如果 I 为格 $(S,\vee,\wedge)$ 的理想. 如果 I 既为 s 理想也为 l 理想, 我们称 I 为 sl 理想.

定义 5.1.1　设 ρ 为 l 半群 S 的 l 同余, 如果 l 半群 S/ρ 有最小元 $e\rho$,

$$\mathrm{Ker}\rho = \{a \in S \mid (a,e) \in \rho\}$$

称为 ρ 的核.

显然 $\mathrm{Ker}\rho$ 为 S 的 sl 理想, 如果 S 有最小元 c, 则 $c\rho$ 为 S 的最小元, 这时对任意 $\rho \in LC(S)$, $\mathrm{Ker}\rho$ 均存在.

引理 5.1.2　有最小元 e 的格序半群 S 的 sl 理想集是完备格.

证明 设 $SL(S)$ 为 S 的所有 sl 理想集，则 $SL(S)$ 关于集合的包含关系构成偏序集，有最大元 S 且 S 的任一 sl 理想簇之交仍为 sl 理想，根据第零章有关结论， $SL(S)$ 为完备格.

设 $I_1, I_2 \in SL(S)$，记

$$I_1 \vee I_2 = \{x \in S \mid (\exists y_1 \in I_1)\ (\exists y_2 \in I_2)\ x \leq y_1 \vee y_2\},$$

则 $I_1 \vee I_2$ 就是格 $SL(S)$ 中元素 I_1 和 I_2 的并. 事实上，设 $x, y \in I_1 \vee I_2$，存在 $y_1, z_1 \in I_1, y_2, z_2 \in I_2$ 使得

$$x \leq y_1 \vee y_2, y \leq z_1 \vee z_2,$$

且

$$\begin{aligned}(\forall s \in S) \qquad & sx \leq sy_1 \vee sy_2, ys \leq y_1 s \vee y_2 s,\\ & x \vee y \leq (y_1 \vee z_1) \vee (y_2 \vee z_2),\end{aligned}$$

则 $(\forall s \in S)\ x \vee y \in I_1 \vee I_2,\ sx, xs \in S$. 设 $x \in I_1 \vee I_2, y \in S$ 且 $y \leq x$，容易验证 $y \in I_1 \vee I_2$，所以 $I_1 \vee I_2$ 为 S 的包含 I_1 和 I_2 的 sl 理想. 设 I 包含 I_1 和 I_2，容易看出 $I_1 \vee I_2 \subseteq I$. □

引理 5.1.3 设 I 为 dl 半群的 sl 理想， ρ_I 为 S 上的二元关系，

$$\rho_I := \{(x, y) \in S \times S \mid (\exists i \in I)\ x \vee i = y \vee i\},$$

则 1) ρ_I 为 S 的 l 同余； 2) I 为 ρ_I 的核.

证明 1) 仅仅为验证，略去证明. 2) 设 $x \in I, (x, y) \in \rho_I, y \in S$ ，则存在 $i \in I$ 使得 $x \vee i = y \vee i$，因此 $y \leq i \vee y = x \vee i \in I$，即 $y \in I$，$x\rho_I \subseteq I$；另一方面设 $y \in I$，因为 $x \vee (x \vee y) = y \vee (x \vee y), x \vee y \in I$，故 $(y, x) \in \rho_I$，即 $y \in x\rho_I$，因此 $I = x\rho_I$. 因为

$$(\forall a \in S)\ a\rho_I \wedge x\rho_I = (a \wedge x)\rho_I = x\rho_I,$$

所以 $x\rho_I$ 为 S/ρ_I 的最小元，$\mathrm{Ker}\rho_I = \{y \in S \mid (y,x) \in \rho_I\} = I$.

□

下面我们给出格 $SL(S)$ 和 $LC(S)$ 之间的关系.

定理 5.1.4 设 S 为 dl 半群，则格 $SL(S)$ 可以 l 嵌入到格 $LC(S)$ 中.

证明 设 φ 为 $SL(S)$ 到 $LC(S)$ 的映射，$\varphi(I) = \rho_I, \forall I \in SL(S)$. 如果 $\rho_I = \rho_J$, 则 $\mathrm{Ker}\rho_I = \mathrm{Ker}\rho_J$, 由引理 5.1.3, $I = J$, 所以 φ 为单射. 显然

$$\rho_{I\wedge J} \subseteq \rho_I \cap \rho_J,$$

设 $(x,y) \in \rho_I \cap \rho_J$, 存在 $i_1 \in I_1, i_2 \in I_2$ 使得

$$x \vee i_1 = y \vee i_1, x \vee i_2 = y \vee i_2.$$

因此

$$\begin{aligned} x \vee (i_1 \wedge i_2) &= (x \vee i_1) \wedge (x \vee i_2) \\ &= (y \vee i_1) \wedge (y \vee i_2) = y \vee (i_1 \wedge i_2), \end{aligned}$$

即 $(x,y) \in \rho_{I\wedge J}$ ，这时我们有

$$\rho_I \cap \rho_J \subseteq \rho_{I\wedge J}.$$

由上证明得 $\rho_I \cap \rho_J = \rho_{I\wedge J}$ (*). 设 $(x,y) \in \rho_I \vee \rho_J$, 存在 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n-1} \in S$ 使得

$$x\rho_I a_1 \rho_J a_2 \rho_I a_3 \cdots a_{2n-1} \rho_J y,$$

即存在 $i_1, i_2, \cdots, i_n \in I$, $j_1, j_2, \cdots, j_n \in J$ 使得

$$\begin{aligned} &x \vee i_1 = a_1 \vee i_1, a_1 \vee j_1 = a_2 \vee j_1, \cdots, \\ &a_{2n-2} \vee i_{n-1} = a_{2n-1} \vee j_{n-1}, \\ &a_{2n-1} \vee j_n = y \vee j_n. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} & x \vee [(i_1 \vee i_2 \vee \cdots \vee i_n) \vee (j_1 \vee j_2 \vee \cdots \vee j_n)] \\ = \quad & y \vee [(i_1 \vee i_2 \vee \cdots \vee i_n) \vee (j_1 \vee j_2 \vee \cdots \vee j_n)], \end{aligned}$$

即 $(x,y) \in \rho_{I\vee J}$,我们证明了 $\rho_I \vee \rho_J \subseteq \rho_{I\vee J}$.

另一方面, 设 $(x,y) \in \rho_{I\vee J}$,存在 $i \in I \vee J$ 使得 $x \vee i = y \vee i$. 由 $I \vee J$ 的性质, 存在 $y_1 \in I, y_2 \in J$ 使得 $i \leq y_1 \vee y_2$,因此 $x \vee (y_1 \vee y_2) = y \vee (y_1 \vee y_2)$,因此可得

$$((x \vee y_2), (y \vee y_2)) \in \rho_I, \ ((x \vee y_1), (y \vee y_1)) \in \rho_J.$$

因为 ρ_I, ρ_J 为 l 同余, 故

$$(x, x \wedge (y \vee y_2)) \in \rho_I, ((x \vee y_1) \wedge y, y) \in \rho_J.$$

因为

$$\begin{aligned} (y \wedge x) \vee (y_2 \wedge x) \vee y_2 &= (y \wedge x) \vee y_2, \\ (y \wedge x) \vee y_1 &= (x \wedge y) \vee (y_1 \wedge y) \vee y_1, \end{aligned}$$

所以, $((y \vee y_2) \wedge x, x \wedge y) \in \rho_J, (x \wedge y, (x \vee y_1) \wedge y) \in \rho_I$. 综上所得

$$(x,y) \in (\rho_I \circ \rho_J)^2 \subseteq \rho_I \vee \rho_J,$$

即 $\rho_{I\vee J} \subseteq \rho_I \vee \rho_J$. 故 $\rho_{I\vee J} = \rho_I \vee \rho_J$ (**). 由 (*) 和 (**) φ 为 l 嵌入映射. □

设 S 的任意 l 同余 ρ 的核 Kerρ 均存在, 我们可以定义 $LC(S)$ 上的二元关系 Ker

$$(\rho_1, \rho_2) \in \text{Ker} \Leftrightarrow \text{Ker}\rho_1 = \text{Ker}\rho_2.$$

则 Ker 是 $LC(S)$ 上的等价关系. 设 S 为 dl 半群且有最小元 0, 则 $\forall \rho \in LC(S)$, Ker$\rho = 0\rho$, 这时不难验证 Ker 为 $LC(S)$ 上格同余关系.

定理 5.1.5 假设 S 为 dl 半群且包含最小元 0, 则格 $SL(S)$ 和格 $LC(S)/\mathrm{Ker}$ 是 l 同构的.

证明 设 $\psi: SL(S) \to LC(S)/\mathrm{Ker} \mid I \to \rho_I\mathrm{Ker}$, 则由定理 5.1.4 ψ 为单射. $\forall \rho \in LC(S)$, 设 $\mathrm{Ker}\rho = I$, 由引理 5.1.3 , $\rho_I\mathrm{Ker} = \rho\mathrm{Ker}$, 则 $\psi(I) = \rho\mathrm{Ker}$, 所以 ψ 为满射. 由定理 5.1.4 的证明不难得出 ψ 为 l 同构映射. □

定理 5.1.6 设 S 为 dl 半群, I 为 S 的 sl 理想, 则 ρ_I 和下面定义的 ρ^I

$$(a,b) \in \rho^I \Leftrightarrow \quad \{x \in S \mid (\forall c_1, c_2 \in S^1)\ c_1ac_2 \wedge x \in I\} = \{x \in S \mid (\forall c_1, c_2 \in S^1)\ c_1bc_2 \wedge x \in I\}$$

分别为集合 $\{\rho \in LC(S) \mid \mathrm{Ker}\rho = I\}$ 的最大元和最小元.

证明 首先我们证明 ρ^I 也是核为 I 的 l 同余, 由 ρ^I 的定义不难验证 ρ^I 为 S 上的等价关系.

设 $(a,b) \in \rho^I$ $\forall c \in S$, 则 $\forall c_1, c_2 \in S^1$,

$$\begin{aligned} &\{x \in S \mid c_1(ca)c_2 \wedge x \in I\} = \{x \in S \mid (c_1c)ac_2 \wedge x \in I\} \\ = \ &\{x \in S \mid (c_1c)bc_2 \wedge x \in I\} = \{x \in S \mid c_1(cb)c_2 \wedge x \in I\}, \end{aligned}$$

所以 $(ca, cb) \in \rho^I$, 同理得 $(ac, bc) \in \rho_I$. 另一方面, 因为

$$\begin{aligned} &\{x \in S \mid c_1(c \vee a)c_2 \wedge x \in I\} \\ = \ &\{x \in S \mid (c_1cc_2 \vee c_1ac_2) \wedge x \in I\}, \end{aligned}$$

如果 $c_1(c \vee a)c_2 \wedge x \in I$, 则 $c_1cc_2 \wedge x$, $c_1ac_2 \wedge x \in I$. 由于 $(a,b) \in \rho^I$, 从而 $c_1cc_2 \wedge x, c_1bc_2 \wedge x \in I$, 即

$$(c_1cc_2 \wedge x) \vee (c_1bc_2 \wedge x) = c_1(c \vee b)c_2 \wedge x \in I,$$

结果

$$\begin{aligned} &\{x \in S \mid c_1(c \vee a)c_2 \wedge x \in I\} \\ \subseteq \ &\{x \in S \mid c_1(c \vee b)c_2 \wedge x \in I\}, \end{aligned}$$

对称地我们可证反向包含关系也成立，即 $(a\vee c, b\vee c)\in\rho^I$. 同理可证 $(a\wedge c, b\wedge c)\in\rho^I$. 以上证明了 ρ^I 为 S 上的 l 同余. 设 $i\in I, a\in S$ 且 $(a,i)\in\rho^I$, 则 $\forall c_1,c_2\in S^1$,

$$\{x\in S\mid c_1ac_2\wedge x\in I\}=\{x\in S\mid c_1ic_2\wedge x\in I\}=S,$$

因此 $\{x\in S\mid a\wedge x\in I\}=S$, 故 $a\in I$. 另一方面, $\forall a\in I$, 不难看出 $(a,i)\in\rho^I$, 故 I 为 ρ^I 类. 又 $\forall x\in S$, $x\rho^I\wedge i\rho^I=(x\wedge i)\rho^I=i\rho^I$, 所以 $i\rho^I$ 为 S/ρ^I 的最小元, 即 $\mathrm{Ker}\rho^I=I$.

假设 $\rho\in LC(S)$ 且 $\mathrm{Ker}\rho=I$, 又设 $(x,y)\in\rho_I$, 则存在 $i\in I$ 使得 $x\vee i=y\vee i$, 从而

$$(x\vee i)\rho=x\rho\vee i\rho=x\rho=y\rho=(y\vee i)\rho,$$

即 $(x,y)\in\rho$. 又设 $(a,b)\in\rho$, 则

$$(\forall c_1,c_2\in S^1)\ (\forall x\in S)\ (c_1ac_2\wedge x, c_1bc_2\wedge x)\in\rho.$$

如果 $c_1ac_2\wedge x\in I$, 因为 $\mathrm{Ker}\rho=I$, 所以 $c_1bc_2\wedge x\in I$, 即

$\{x\in S\mid c_1ac_2\wedge x\in I\}\subseteq\{x\in S\mid c_1bc_2\wedge x\in I\}$, $\forall c_1,c_2\in S^1$;

反向包含关系可类似得出，由此证明了 $(a,b)\in\rho^I$. □

由以上证明我们已知道，如果 S 为 dl 半群，则 S 的任意 sl 理想必为 S 的 S 的某个 l 同余的核. 下面我们仅看 S 的 l 理想 (格理想) .

定理 5.1.7 如果 l 半群的任何 l 理想为 S 的某个 l 同余的核，则 S 一定是分配的.

证明 如果 S 不是分配格，则 S 中必包含五边形 $N_5=\{a,b,c,d,e\}$ 或菱形 $M_5=\{a,b,c,d,e\}$, 其中最大元为 e, 最小元为 d, a 为 d 的覆盖, $b\|a$. 设 $I=(a]$, 则 I 为 S 的 l 理想. 由假设 I 为 S 的某个 l 同余 ρ 的 ρ 类，则 $(a,d)\in\rho$, 因此

$$(b\vee a, b\vee d)=(e,b)\in\rho,$$

结果 $(c,d) \in \rho, c = c \wedge e, d = c \wedge b$, 这和 I 为 ρ 类矛盾. □

由第四章我们知道在负序 l 半群中，任意 l 理想均为 sl 理想，所以由引理 5.1.3, 定理 5.1.4 得

定理 5.1.8 设 S 为负序 l 半群，则 S 为分配的当且仅当 S 的任意一个 l 理想为 S 的某个 l 同余的核.

§2 l 半格

本节我们主要刻画格序半格 (l 半格) 的同余. 主要结果来自 [73] .

一个 l 半群 S 称为 l 半格, 如果 S 为半格且 $(\forall a, b \in S)\ ab \leq a \wedge b$. 显然任意 l- 半格是负序格序半群. 我们已经知道负序 l 半群的 sl 理想和 l 理想一致. 设 P 为 sl 理想 (l 理想), P 称为素的，如果 $ab \in P$ 导出 $a \in P$ 或 $b \in P$; P 称为 l 素的，如果 $a \wedge b \in P$ 导出 $a \in P$ 或 $b \in P$, $\forall a, b \in S$. 根据分配格的有关性质，我们有

命题 5.2.1 设 S 为负序分配的 l 半群，I 为 S 的 sl 理想 $a \notin I, a \in S$, 则一定存在一个 l 素的 sl 理想 P 使得 $I \subseteq P$ 且 $a \notin P$.

推论 5.2.2 设 S 为负序分配的 l 半群，则 S 的每个真的 sl 理想一定包含在 S 的某个 l 素的 sl 理想之中.

推论 5.2.3 设 S 为负序分配的 l 半群，$a, b \in S$ 且 $a \neq b$, 则存在 S 的 l 素的 sl 理想 P 分离 a 和 b, 即 $a \in P, b \notin P$ 或 $b \in P, a \notin P$.

推论 5.2.4 负序分配 l 半群 S 中的每个真的 sl 理想 I 是包含 I 的 S 的所有 l 素的 sl 理想的交.

以上结论的证明和分配格有关结论的证明类似，略去.

下面我们考虑 l- 半格 S. 设 P 为 S 的素 sl 理想，我们定义 S 上的二元关系 ρ_P 为

$$(x,y)\in\rho_P\Leftrightarrow x,y\in P\text{或}x,y\notin P.$$

定理 5.2.5 ρ_P 为 S 上的 l 同余.

证明 容易看出 ρ_P 为 S 上的等价关系. 设 $(a,b)\in\rho_P$, $\forall c\in S$, 如果 $a,b\in P$, 则 $ca,cb\in P$; 如果 $a,b\notin P$, 则 $ca,cb\in P$ 或 $ca,cb\notin P$. 事实上，如果 $ca\notin P$, 则 $c\notin P$ 且 $a\notin P$, 从而 $b\notin P,cb\notin P$; 如果 $ca\in P$, 因为 P 为素的，所以 $c\in P$ 或 $a\in P$. 如果 $c\in P$, 则 $cb\in P$; 如果 $a\in P$, 因为 $(a,b)\in\rho_P$, 因此 $cb\in P$. 综上讨论，$(ca,cb)\in\rho_P$.

另一方面，设 $a\vee c\in P$, 则 $a\in P,c\in P$. 因为 $(a,b)\in\rho_P$, 所以 $b\in P$, 从而 $b\vee c\in P$; 如果 $a\vee c\notin P$, 则 $b\vee c\notin P$. 否则 $b,c\in P$，从而 $a,c\in P,a\vee c\in P$ 矛盾. 以上证明了当 $(a,b)\in\rho_P,\forall c\in S$, 则 $(a\vee c,b\vee c)\in\rho_P$. 同理可证 $(a\wedge c,b\wedge c)\in\rho_P$.

□

设 A 为 l 半格 S 的所有 sl 素理想集 $\mathcal{P}(S)$ 的子集，令

$$\rho_A=\bigcap\{\rho_P\mid P\in A\},$$

则 ρ_A 为 S 的 l 同余，等价地，

$$(x,y)\in\rho_A\Leftrightarrow x,y\in P\text{ 或 }x,y\notin P,\forall P\in A.$$

设 P 为素 sl 理想，则 S/ρ_P 只有二个元素 $\{x\rho_P,y\rho_P\}$，其中 $x\in P,y\notin P$. 因为 $(x\wedge y)\rho_P=x\rho_P$, 所以 $x\rho_P\preceq_P y\rho_P$ 且 $(x\rho_P)(y\rho_P)=x\rho_P$. 由上讨论 S/ρ_P 是一个全序半群且 $x\rho_P$ 为 S/ρ_P 的零元，且 S/ρ_A 是 $\{S/\rho_P\}_{\rho\in A}$ 这一组全序半群的亚直积.

引理 5.2.6 设 S 为 l 半格，$H \subseteq S$, 则 H 在 S 中生成的 sl 理想为

$$<H>=\{x \in S \mid x \leq \bigvee_{i \in I_m} a_i, a_i \in H\},\ |I_m| < \infty.$$

证明为直接验证，略去.

引理 5.2.7 设 S 为 l 半格，$a, b \in S$ 且 $a \neq b$, 则存在 S 的素 sl 理想 P 使得 P 分离 a, b .

证明 设 $a, b \in S, a \neq b$, 则 a, b 可比较，不妨设 $a \leq b$ 或 $a||b$. 令 A 为 S 的所有包含 a 但不包含 b 的 sl 理想集，则 $A \neq \emptyset$, 因为 $(a]$ 为 sl 理想，但是 $b \notin (a]$. 由 Zorn 引理，A 中存在极大元 P. 下面我们证明 P 为 S 的素 sl 理想，事实上，设 $xy \in P$, 如果 $x \notin P, y \notin P$, 则

$$<x,P>=\{z \in S \mid (\exists p \in P)\ z \leq x \vee p\},$$
$$<y,P>=\{w \in S \mid (\exists p \in P)\ w \leq y \vee p\}.$$

因为 $<x,P>\supset P, <y,P>\supset P$, 所以 $b \in <x,P> \cap (y,P>$, 即

$$b^2 = b \in <x,P><y,P> \subseteq <xy,P>=P,$$

矛盾. □

定理 5.2.8 l 半群 S 为 l 半格当且仅当 S 可表为一些全序半格的亚直积.

证明 我们仅仅需证必要性. 设 S 为 l 半格，则 $\iota = \bigcap\{\rho_P \mid P \in \mathcal{P}(S)\}$. 事实上，由引理 5.2.7, 设 $a, b \in S, a \neq b$, 必有 $P \in \mathcal{P}(S)$ 使得 $a \in P, b \notin P$ 或 $a \notin P, b \in P$, 即 $(a, b) \notin \rho_P$. 故 $\iota = \bigcap\{\rho_P \mid P \in \mathcal{P}(S)\}$ 成立. 由此可得 S 是序半群簇 $\{S/\rho_P\}_{P \in \mathcal{P}(S)}$ 的亚直积，而且每个序半群 S/ρ_P, $\forall P \in \mathcal{P}(S)$ 是二元素全序半格. □

推论 5.2.9 任何 l 半格是分配的.

在前面我们已经知道，给定 $\mathcal{P}(S)$ 的任意子集 A, 我们可以构造 l 半格 S 的一个 l 同余 ρ_A, 现在我们问：是否 S 的任一 l 同余均可这样构造呢？下面我们来回答这个问题.

引理 5.2.10 设 S 为 l 半格，$P, Q \in \mathcal{P}(S)$ 且 $P \neq Q$, 则

$$\rho_P \vee \rho_Q = \pi.$$

证明 $\forall x, y \in S$, 设 $x, y \in P \cap Q$ 或 $x, y \notin P \cup Q$, 则 $(x, y) \in \rho_P \vee \rho_Q$. 下面我们考虑其他情形.

情形 I 设 $y \in P \cup Q$ 但 $x \notin P \cup Q$, 我们有

1) 如果 $y \in P \backslash Q$, 则 $(x, y) \in \rho_Q \subseteq \rho_P \vee \rho_Q$；

2) 如果 $y \in Q \backslash P$, 则 $(x, y) \in \rho_P \subseteq \rho_P \vee \rho_Q$；

3) 如果 $y \in P \cap Q$ ，因为 $P \neq Q$, 存在 $z \in S$ 使得 $z \in P, z \notin Q$ 或 $z \notin P$ 但 $z \in Q$, 不妨设 $z \in P, z \notin Q$, 则 $(x, z) \in \rho_Q, (z, y) \in \rho_P$, 即 $(x, y) \in \rho_Q \vee \rho_P$.

情形 II 设 $x \in P \cap Q, y \notin P \cap Q$ ，如果 $y \in P$ 或 $y \in Q$, 则 $(x, y) \in \rho_P$ 或 $(x, y) \in \rho_Q$; 如果 $y \notin P \cup Q$, 类似于情形 I(3), 我们有 $(x, y) \in \rho_P \vee \rho_Q$. 综上所述，$\rho_P \vee \rho_Q = \pi$. □

命题 5.2.11 设 S 为 l 半格，$A \subseteq \mathcal{P}(S), \varphi$ 为 S 到 S/ρ_A 的 l 同态，如果 $P \in A$, 则 $P\varphi$ 为 S/ρ_A 素的 sl 理想且 $P = (P\varphi)\varphi^{-1}$.

证明 设 $P \in A$ ，容易验证 $P\varphi$ 为 S/ρ_A 的 sl 理想，设 $x, y \in S/\rho_A$ 且 $xy \in P\varphi$, 存在 $a, b \in S, c \in P$ 使得 $x = a\varphi, y = b\varphi, xy = (ab)\varphi = c\varphi$. 由 ρ_A 的定义，$ab \in P$, 由 P 为素理想得 $a \in P$ 或 $b \in P$, 即 $x \in P\varphi$ 或 $y \in P\varphi$. 显然 $P \subseteq (P\varphi)\varphi^{-1}$. 设 $x \in (P\varphi)\varphi^{-1}$, 则 $x\varphi \in P\varphi$, 存在 $y \in P$ 使得 $x\varphi = y\varphi$, 从而 $x \in P$, 故 $(P\varphi)\varphi^{-1} = P$. □

定理 5.2.12 设 S 为 l 半格, $\rho \in LC(S), \rho \neq \pi$, 则存在 $A \subseteq \mathcal{P}(S)$ 使得 $\rho = \rho_A$.

证明 设 $\rho \neq \pi$, 由引理 5.2.7, 则 $\mathcal{P}(S/\rho) \neq \emptyset$, 设 φ 为 S 到 S/ρ 的 l 同态,

$$A = \{P\varphi^{-1} \mid P \in \mathcal{P}(S/\rho)\},$$

则 $A \neq \emptyset$, 下面我们证明 $\rho = \rho_A$. 不难验证 $P\varphi^{-1}$ 为 S 的素 sl 理想, 即 $\forall Q \in A$, 存在 S/ρ 的素 sl 理想 P 使得 $Q = P\varphi^{-1}$.

设 $(x,y) \in \rho$, 则 $x\varphi = y\varphi$. 对 S/ρ 的任一素 sl 理想 P, 有 $x\varphi = y\varphi \in P$ 或 $x\varphi = y\varphi \notin P$, 即 $x,y \in P\varphi^{-1}$ 或 $x,y \notin P\varphi^{-1}$, 因此 $(x,y) \in \rho_A$. 反之, 设 $(x,y) \notin \rho$, 则 $x\varphi \neq y\varphi$, 由引理 5.2.7, 存在 S/ρ 的素 sl 理想 P 使得 $x\varphi \in P, y\varphi \notin P$ 或 $x\varphi \notin P, y\varphi \in P$. 这就意味着 $x \in Q, y \notin Q$ 或 $x \notin Q, y \in Q$, 这里 $Q = P\varphi^{-1}$, 因此 $(x,y) \notin \rho_A$. □

§3 算术格序半群

本节我们讨论一类格序半群, 称为算术格序半群, 是 Ciobanu 和 Deaconescu [74] 在 1985 年提出的.

定义 5.3.1 算术格序半群 (al 半群) 是一个代数系统 $(S,\cdot,\vee,\wedge,u)$, 满足:

1) $(S,\cdot,u)$ 是幺半群, u 为其单位元;

2) $(S,\vee,\wedge,u)$ 是以 u 为最小元的格 (如果 S 中包含 0 元, 则 0 为最大元) ;

3) $(\forall a,b,c \in S)$ $a(b \vee c) = ab \vee ac, a(b \wedge c) = ab \wedge ac$ 且 $ab = (a \vee b)(a \wedge b)$.

由以上的定义, 我们看出算术格序半群一定是正格序半群且是可换半群, 公理 3) 中 $ab = (a \vee b)(a \wedge b)$ 不是没有意义的. 例

如如果 S 为可换的 l 群，则

$$\begin{aligned}(a\vee b)(a\wedge b) &= (a\vee b)a(a^{-1}\wedge b^{-1})b\\ &= a(a\vee b)(a\vee b)^{-1}b=ab.\end{aligned}$$

例 5.3.2 1) 设 N 为自然数集，N 关于普通序关系和运算构成格序半群且有单位元 1 为最小元． N 为算术格序半群 (实际上是全序半群)．

2) 设 $S=\{f\mid f:[0,1]\to[0,1]\}$, 定义

$$(f\wedge g)(x)=\max\{f(x),g(x)\},(f\vee g)(x)=\min\{f(x),g(x)\},$$

$(fg)(x)=f(x)g(x),\forall x\in S$, 则 S 是算术格序半群，$[0,1]$ 上的常值映射 $u(x)=1,\ \forall x\in[0,1]$ 为其单位且是 S 的最小元，0 映射为其最大元．

3) 设 L 为分配格，e 为 L 的最小元，定义 L 上的二元运算 $ab=a\vee b,\forall a,b\in L$, 则 L 为算术格序半群．

我们需要说明的是五边形格 N_5 和菱形格 M_5 均不能作为一个算术格序半群的承载格．以 M_5 为例，如果 M_5 上可以定义一个二元运算使其为算术格序半群．设 $M_5=\{u,a,b,c,0\}$, 其中 u 为最大元，0 为最小元，则

$$xy=(x\vee y)(x\wedge y)=0u=0,\forall x,y\in\{a,b,c\}.$$

$$a(b\wedge c)=au=a\neq 0=0\vee 0=ab\vee ac.$$

引理 5.3.3 设 S 为 al 半群，则下列各款成立：

1) 设 $a,b,c\in S,a,b\le c$ 且 $a\wedge b=u$, 则 $ab\le c$；

2) 设 $a,b,c\in S,ab=a\vee b$ 且 $c\le b$, 则 $ab=b\vee ac$；

3) 设 $a,a_1,a_2,\cdots,a_n\in S$, 则

i) $a\wedge(a_1a_2\cdots a_n)=a\wedge(a\wedge a_1)(a\wedge a_2)\cdots(a\wedge a_n)$；

ii) $$a_1a_2\cdots a_n = (\bigvee_{i=1}^{n} a_1a_2\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_n)(\bigwedge_{i=1}^{n} a_i)$$
$$= (\bigwedge_{i=1}^{n} a_1a_2\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_n)(\bigvee_{i=1}^{n} a_i);$$

iii) 如果 $a_ia_j = a_i \vee a_j, \forall i,j \in \{1,2,\cdots,n\}$, 则 $\forall k_i \in \mathbf{Z}^+$,

$$a_1^{k_1}a_2^{k_2}\cdots a_n^{k_n} = \bigvee_{i=1}^{n} a_i^{k_i}.$$

4) 如果 S 的承载格是分配格，则

$$(\forall a,b \in S)\ a^2 \wedge b^2 \le ab \le a^2 \vee b^2.$$

证明 1), 2) 和 4) 是简单验证. 我们证明 3), 这里仅对 $n=3$ 的情形给予证明. n 为其他值时可以类似证明.

i) $$a \wedge (a\wedge a_1)(a\wedge a_2)(a\wedge a_3)$$
$$= a \wedge (a^2 \wedge aa_2 \wedge a_1a \wedge a_1a_2)(a\wedge a_3)$$
$$= a \wedge (a^3 \wedge aa_2a \wedge a_1a^2 \wedge a_1a_2a \wedge a^2a_3$$
$$\wedge aa_2a_3 \wedge a_1aa_3 \wedge a_1a_2a_3),$$

因为 $a_ia_j \ge u, a \ge u$, $aa_ia_j \ge a$, 且 $a^2a_i \ge a, a^3 \ge a, i,j = 1,2,3$, 所以

$$a \wedge (a\wedge a_1)(a\wedge a_2)(a\wedge a_3) = a \wedge a_1a_2a_3.$$

ii) $$a_1a_2a_3 = (a_1 \vee a_2)(a_1\wedge a_2)a_3$$
$$= (a_1\vee a_2)(a_1\wedge a_2\wedge a_3)[(a_1\wedge a_2)\vee a_3]$$
$$= (a_1\vee a_2)[(a_1\wedge a_2)\vee a_3](a_1\wedge a_2\wedge a_3)$$

$$
\begin{aligned}
&= (a_1a_2 \vee a_1a_3 \vee a_2a_3)(a_1 \wedge a_2 \wedge a_3),\\
a_1a_2a_3 &= (a_1 \wedge a_2)(a_1 \vee a_2)a_3\\
&= (a_1 \wedge a_2)[(a_1 \vee a_2) \wedge a_3](a_1 \vee a_2 \vee a_3)\\
&= (a_1a_2 \wedge a_1a_3 \wedge a_2a_3)(a_1 \vee a_2 \vee a_3).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{iii)} \quad a_1^{k_1}a_2^{k_2}a_3^{k_3} &= a_1^{k_1}a_2^{k_2}a_3 = a_1a_2a_3 \quad (a_i^{k_i} = a_i)\\
&= a_1(a_2 \vee a_3) = a_1a_2 \vee a_1a_3\\
&= a_1 \vee a_2 \vee a_3 = a_1^{k_1} \vee a_2^{k_2} \vee a_3^{k_3}.
\end{aligned}
$$

□

下面我们讨论算术格序半群的结构性质.

引理 5.3.4 设 $(S, \cdot, \vee, \wedge, u)$ 为算术格序半群，则

1) 格 $(S, \vee, \wedge, u)$ 的每个滤子为半群 $(S, \cdot, u)$ 的理想;

2) 如果 $(S, \cdot, u)$ 是主理想半群，则 $[a) = aS, \forall a \in S$;

3) 设 I 为 $(S, \cdot, u)$ 的素理想，则 $S \backslash I$ 为 $(S, \vee, \wedge, u)$ 的子格.

证明 1) 设 F 为格 S 的滤子，$a \in F, \forall b \in S$, 因为 $b \geq u$, 所以 $ab \geq au \geq a$, 故 $ab \in F$.

2) 因为 $[a)$ 为滤子，由 1) $[a) = I(x)$. 因为 $a \in [a)$, $[a)$ 为 S 的理想，故 $I(x) \subseteq [a)$, 又 $I(x) = xS, \forall y \in I(x)$ 只有 $y \geq x$, 因为 $a \in I(x)$, $x = a$, 从而 $[a) = I(a)$.

3) 设 $a, b \in S \backslash I$, 则 $a \vee b \in S \backslash I$. 如果 $a \wedge b \in I$, 则 $ab = (a \vee b)(a \wedge b) \in I$, 因为 I 为素理想，必有 $a \in I$ 或 $b \in I$, 矛盾. □

命题 5.3.5 设 S 为算术格序半群， $a \in S, e \in E(S)$, 则下列各款成立:

1) $q(a) = \{x \in S \mid a \wedge x = u\}$ 是 S 的子半群和格理想;

2) $p(a)=\{b\in S\mid ab=a\vee b\}$ 是上半格;

3) $i(a)=\{b\in S\mid ab=a\}$ 是 S 的格理想和子半群且 $i(e)=(e]$ 为 S 的子算术格序半群;

4) $n(a)=\{b\in S\mid ab=b\}$ 是 S 的子格和半群理想且 $n(i)=eS$ 为 S 的子算术格序半群.

证明 1) 设 $x,y\in q(a)$, 则 $a\wedge x=u, a\wedge y=u$, 因此 $ay\wedge xy=y, ax\wedge xy=x$,

$$a\wedge x\wedge y=a\wedge ay\wedge ax\wedge xy=a\wedge xy=u,$$

即 $xy, x\wedge y\in q(a)$. 又 $a\wedge xy=a\wedge(x\vee y)(x\wedge y)=u$, 故

$$u\leq a\wedge(x\vee y)\leq a\wedge xy=u,$$

即 $x\vee y\in q(a)$. 如果 $z\in S, z\leq x$, 显然 $z\in q(a)$.

2) 显然.

3) $i(a)$ 显然为 S 的子格和子半群, 设 $b\in i(a), c\leq b$, 则 $ac=a(c\wedge b)=ac\wedge a$, 所以 $ac\leq a$, 又 S 为正序的, 所以 $ac\geq a$, 因此 $ac=a$, $c\in i(a)$. 如果 $a=e, b\in i(e)$, 则 $eb=e$, 故 $b\leq e$. 反之, 设 $x\leq e$, 则 $ex\leq e^2=e, ex\geq e$, 从而 $x\in(e]$. 以上证明了 $i(e)=(e]$. 要证明 $i(e)$ 为 S 的子算术格序半群, 从以上证明已经看出 $i(e)$ 满足算术格序半群的定义且最小元为 u, 零元为 e.

4) 类似于 3) 的证明. □

定理 5.3.6 设 S 为算术格序半群, 则

1) 如果 $(S,\cdot,u)$ 是可消去的, 则 $(S,\vee,\wedge)$ 是分配的;

2) 设 $(S,\cdot,u)$ 是拟零半群且 $|S|\geq 2$, 即 $a,b\in S, a\neq u, b\neq u$, 则 $ab=0$. 那么 $(S,\vee,\wedge,u)$ 可以作为算术格序半群 $(S,\cdot,\vee,\wedge,u)$ 的承载格当且仅当 u 是有限交不可约的.

证明 1) 设 $a,b\in S,\forall x\in S$, 如果 $a\wedge x=b\wedge x$, $a\vee x=b\vee x$, 则

$$ax=(a\vee x)(a\wedge x)=(b\vee x)(b\wedge x)=bx,$$

由 S 是可消去的，所以 $a=b$.

2) 设 $(S,\vee,\wedge,u)$ 为 $(S,\cdot,\vee,\wedge,u)$ 的承载格，$a\wedge b=u$, 如果 $a\neq u,b\neq u$, 则 $ab=a\vee b=0$, 从而 $a=au=a(a\wedge b)=0\wedge a^2=0$, $b=bu=b(a\wedge b)=0$ 和 $u\neq 0$ 矛盾.

反之，设 $(S,\cdot,u)$ 是拟零的且 u 为有限交不可约，则格 $(S,\vee,\wedge)$ 是 $(S,\cdot,\vee,\wedge,u)$ 的承载格，事实上，只要看 $(S,\cdot,\vee,\wedge,u)$ 是否为 al 半群即可. 只要验证 $ab=(a\vee b)(a\wedge b),\forall a,b\in S$. 如果 a,b 中有一个元为单位元 u, $ab=(a\vee b)(a\wedge b)$ 显然成立；设 $a\neq u,b\neq u$. 则 $ab=0$ 且 $a\vee b\neq u$. 如果 $a\wedge b=u$, 由 u 为交不可约的，$a=u$ 或 $b=u$, 矛盾. 因此 $a\wedge b\neq u$, 故 $(a\vee b)(a\wedge b)=0$. □

命题 5.3.7 设 S 为 al 半群，则下列各款成立：

1) $(\forall a,b\in S)\ E(S)\cap(a\vee b,ab)=\emptyset$;

2) $E(S)$ 为 S 的子 al 半群且 $ef=e\vee f$;

3) 如果 S 的每个子 al 半群均没有零因子，则 $E(S)$ 为链；

4) $[a,b]$ 是 S 的子 al 半群当且仅当 $a,b\in E(S)$ 且 $[a,b]\subseteq aS$;

5) 如果 S 的承载格是分配格，则 $a,b\in E(S)$ 当且仅当 $a\vee b,a\wedge b\in E(S)$;

6) 如果 S 的承载格是分配格，$a\wedge b\in E(S)$ 蕴涵 $a^m\wedge b^n\in E(S)$.

证明 1) 设 $a\vee b<x<ab$, 则 $(a\vee b)^2\leq x^2\leq(ab)^2$, 从而 $x^2\geq(a\vee b)(a\wedge b)=ab$, 当然 $x^2\neq x$.

2) 设 $e,f\in E(S)$, 则 $ef\geq e\vee f$, 又

$$\begin{aligned} ef &= (e\vee f)(e\wedge f) \\ &= (e\wedge ef)\vee(ef\wedge f)=ef\wedge(e\vee f), \end{aligned}$$

所以 $ef\leq e\vee f$, 故 $ef=f\vee e$.

3) 因为 $(ef]$ 为子 al 半群且 ef 为零元 (命题 5.3.5), 只有 $ef=f$ 或 e, 即 $f\leq e$ 或 $f\geq e$.

4) 如果 $[a,b]$ 为子 al 半群, 则 a 为 $[a,b]$ 的单位元, b 为 $[a,b]$ 的零元, 所以 $a,b\in E(S)$. 因此 $\forall x\in[a,b]$, $xb\in[a,b]$, 只有 $xb=b$. 因为 $[a)\subseteq aS$ (引理 5.3.4), 当然 $[a,b]\subseteq aS$. 反之显然.

5) 设 S 是分配格, $a,b\in E(S)$, 则

$$\begin{aligned} (a\vee b)(a\wedge b) &= a(a\wedge b)\vee b(a\wedge b) \\ &= (a\wedge ab)\vee(b\wedge ab) \\ &= a\vee b=ab\in E(S). \end{aligned}$$

又 $(a\wedge b)^2=a\wedge b\wedge ab=a\wedge b$, 所以 $a\wedge b\in E(S)$.

反之, 如果 $a\vee b,a\wedge b\in E(S)$, 由 2) 则,

$$ab=(a\vee b)(a\wedge b)=(a\vee b)\vee(a\wedge b)=a\vee b\in E(S).$$

下面我们分两种情况:

情况 1: 如果 a 和 b 是可比较的, 不妨设 $a\leq b$, 则 $ab=b\in E(S)$, $a=a\wedge b\in E(S)$.

情况 2: 如果 $a||b$ 且 $a\wedge b<a,b<a\vee b$, 则 $a\leq a^2\leq a\vee b$. 如果 $a=a^2$, 则 $a\in E(S)$. 如果 $a^2>a$, 且 $a^2<a\vee b$, 则 $a^2||b$. 事实上, 如果 $a^2\geq b$, 则 $a^2\geq a\vee b$, 矛盾; 如果 $a^2<b$, 则 $a<b$, 矛盾. 这时 $M_5=\{a\wedge b,a,a^2,b,a\vee b\}$ 为含于 S 中的五

边形格，和 S 是分配格矛盾，现只有 $a^2=a$ 或 $a^2=a\vee b$. 如果 $a^2=a\vee b$, 则

$$a\wedge b=(a\wedge b)^2=a^2\wedge ab\wedge ba\wedge b^2=b^2,$$

矛盾. 因此 $a\in E(S)$. 类似地我们可证 $b\in E(S)$.

6) 由引理 5.3.3 可得， $a\wedge b\in E(S)$ 蕴涵 $a^m\wedge b^n\in E(S)$ □

引理 5.3.8 设 S 为主理想半群，则 S 的每个元素是并不可约的元素之并.

证明 由引理 5.3.4, $(S,\vee,\wedge)$ 的每个滤子为 S 的主理想，因此格 S 满足 D.C.C 条件，故 S 的每个元素为并不可约元素之并. □

设 $A(S)$ 为 S 的原子集，我们称 al 半群 S 满足条件 (*):

$(S,\cdot,u)$ 为主理想半群且 $\forall x\in S, a\in A(S)$ ，存在 $n\in \mathbf{Z}^+$ 使得 $a^n\not\leq x$. (*)

引理 5.3.9 设 S 满足条件 (*), $x\in S$ 且 $x\neq u$. x 是并不可约的当且仅当存在 $a\in A(S)$ 使得 $x=a^n$.

证明 设 $a\in A(S),\forall n\in \mathbf{Z}^+$ 如果 $a^n=b\vee c$. 因为 $b\leq a^n$, 则 $b\in I(a)=[a)$, 故 $a\in A(S)\cap(b]$. 又设 $x\in A(S)\cap(b]$, 如果 $x\neq a$, 必有

$$x=x\wedge a^n=x\wedge\prod_{i=1}^{n}(x\wedge a)=x\wedge u=u,$$

矛盾，因此 $A(S)\cap[b)=\{a\}$. 由引理 5.3.4, $b\in[a)=aS$, 存在 $c_1\in S$ 使 $b=ac_1$. 又 $c_1\leq a^n$, 类似于以上讨论， $c_1=ac_2, c_2\in S$. 重复以上过程得 $b=a^m(m\in\mathbf{Z}^+)$, 因为小于 b 的原子只有 a. 同理可证 $c=a^k$ $(k\in\mathbf{Z}^+)$. $b\vee c=a^m\vee a^k=a^{\max\{m,k\}}=a^n$ 必有 $m=n$ 或 $k=n$, 即 $c=a^n$ 或 $b=a^n$,

反之, 设 $x \in S$ 为并不可约的. 如果 $x \neq a^n$ $(a \in A(S), n \in \mathbf{Z}^+)$, 因为 $x \neq u$ 而且由引理 5.3.8, 格 S 满足 D.C.C 条件, 故存在原子 $a \in A(S)$ 使得 $a < x$. 因为 S 满足条件 $(*)$, 由引理 5.3.4(2), 所以我们能找一个最大的 $k \in \mathbf{Z}^+$ 使得 $x = a^k y$ 且 $a^k < x$,

$$x = a^k y = (a^k \vee y)(a^k \wedge y) = a^k \vee y.$$

因为 $a^k \wedge y = y \wedge \prod_{i=1}^{k}(a \wedge y) = u$ (引理 5.3.3(3)). 如果 $x \neq a^k$, 与 x 是并不可约相矛盾. □

定理 5.3.10 设 S 满足 $(*)$, 则 S 的每个元素可表为原子方幂之积而且表示是惟一的.

证明 由引理 5.3.8, 5.3.9 和引理 5.3.3(3) 可以推出. □

§4 格序带

设 B 为带, 我们可以在 B 上引入自然偏序关系 $(e \leq f \Leftrightarrow ef = fe = e)$ (超出本书的范围, 故不作深入讨论), 一般而言, 这个偏序关系和 B 的运算没有相容性. 1968 年, Howie 证明 B 关于自然偏序关系是偏序带当且仅当 B 为矩形带的强半格. 本节我们讨论一个带能否格序化, 格序带有哪些性质. 主要结果来自 [75].

设 B 为带, 则 B 上的 Green 关系 $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{D}$ 分别为:

$$\begin{aligned}
(a,b) \in \mathcal{L} \quad &\Leftrightarrow \quad a = ab, b = ba;\\
(a,b) \in \mathcal{R} \quad &\Leftrightarrow \quad a = ba, b = ab;\\
(a,b) \in \mathcal{D} \quad &\Leftrightarrow \quad a = aba, b = bab.
\end{aligned}$$

关于这些关系我们有以下引理.

引理 5.4.1 设 S 为格序带，则 S 的每个 $\mathcal{D}$ 类 ($\mathcal{L}$ 类或 $\mathcal{R}$ 类) 是 S 的子格.

证明 设 $(a,b)\in\mathcal{L}$，则 $a=ab, b=ba$，因此

$$a=a\vee ab=a(a\vee b), a\vee b=a^2\vee ba=(a\vee b)a,$$

即 $(a,a\vee b)\in\mathcal{L}$，同理可证 $(a,a\wedge b)\in\mathcal{L}$.

类似可证另两个等价关系 $\mathcal{R},\mathcal{D}$ 的等价类为 S 的子格. □

在上引理中 $\mathcal{R}$ 类，$\mathcal{L}$ 类和 $\mathcal{D}$ 类一般不一定是凸子格.

引理 5.4.2 设 S 为格序带，则

1) S 的一个 $\mathcal{D}$ 类一般既不是一个 $\mathcal{L}$ 类，也不是一个 $\mathcal{R}$ 类;

2) $(\forall a,b\in S)\ a\wedge b\le ab\wedge ba\le ab\vee ba\le a\vee b$.

证明 1) 我们只要举个例子即可，设格序带 S 只有惟一一个 $\mathcal{D}$ 类 $\{a,b,c,d\}$，这里 $ab=c, ba=d, a\le c, d\le b$ 且 $c\wedge d=a, c\vee d=b$，这四个元既不是 $\mathcal{L}$ 等价也不是 $\mathcal{R}$ 等价.

2) 因为 $a\wedge b\le a,b$，所以 $(a\wedge b)^2=a\wedge b\le ab,ba$，故 $a\wedge b\le ab\wedge ba\le ab\vee ba$. 又 $a,b\le a\vee b$，所以 $ab\le a\vee b, ba\le a\vee b$，即 $ab\vee ba\le a\vee b$. □

引理 5.4.3 如果带 S 仅有惟一的 $\mathcal{R}$ 类 ($\mathcal{L}$ 类)，则 S 为全序带.

证明 设 S 是一个 $\mathcal{L}$ 类，则 $\forall a,b\in S, ab=a$. 可任意将 S 全序化，设 $\le$ 为 S 上的全序关系，如果 $x\le y$，则

$$cx=c\le c=cy;\quad xc=x\le y=yc.$$

即 S 为全序带. □

定理 5.4.4 任意一个双单 (bisimple) 带 S 均可以格序化.

证明 如果 S 仅只有一个 $\mathcal{R}$ 类 ($\mathcal{L}$ 类)，由引理 5.4.3，结论显然成立. 设 L_0 和 R_0 分别为 S 的 $\mathcal{L}$ 类和 $\mathcal{R}$ 类，$a_0\in L_0\cap R_0$. 设

$x \in S$, 存在 $y, z \in S$ 使得 $(x,y) \in \mathcal{L}$, $(y,a_0) \in \mathcal{R}$, $(x,z) \in \mathcal{R}$, $(z,a_0) \in \mathcal{L}$, 则 $x \in R_z \cap L_y$, $\{a_0\} = R_y \cap L_z$, $x = zy, a_0 = yz$ 且 $S = L_0R_0$ ([14], 定理 2.17). 因为 L_0 和 R_0 均为全序带 (引理 5.4.3) 且 a_0, b_0 分别是 L_0 和 R_0 的最小元 $(a_0 = b_0)$, 设 $\{a_i\}_{i\in I}, \{b_j\}_{j\in J}$ 分别为 L_0 和 R_0 中元素集, 在 S 上定义二元关系 "$\leq$" 如下:

$$b_j a_i \leq b_k a_l \Leftrightarrow b_j \leq b_k, a_i \leq a_l.$$

则 "$\leq$ " 为 S 上的格序关系. 因为 S 为双单的, 即 $\mathcal{D} = S \times S$, 所以 $\forall a, b \in S, a = aba, b = bab$, 因此 S 为格序带且有最小元 a.

□

我们可以看出, 其实 S 和 $L_0 \times R_0$ 同构, 因为 $b_j a_i b_k a_l = b_j a_0 a_l = b_j a_l = b_j b_k a_i a_l$. 设 S 为全序带, $|L_0| \neq 1, |R_0| \neq 1$, $a_1 \in L_0, b_1 \in R_0$ 且 a_1 和 b_1 均不为 $a_0(= b_0)$, $a_1 < b_1$, 因 S 和 $L_0 \times R_0$ 同构, 必有 $(a_1, b_0) < (a_0, b_1)$, 即 $a_1 \leq a_0$, $b_0 < b_1$, 因为 a_0 为最小元, 故 $a_1 = a_0$, 矛盾. 这样我们就有 S 为全序带当且仅当 S 为某一个 $\mathcal{L}$ 类或 $\mathcal{R}$ 类.

下设 S 带单位元 e, 且 S 为分配的格序带.

引理 5.4.5 在 S 中, 如果 $(a, e) \in \mathcal{D}$, 则 $a = e$. 如果 $a \neq e$, 则 $(a \vee e, a \wedge e) \notin \mathcal{D}$.

证明 如果 $(a, e) \in \mathcal{D}$, 则 $e = eae = a$. 如果 $a \neq e$, 且 $(a \vee e, a \wedge e) \in \mathcal{D}$, 则

$$a \wedge e = (a \wedge e)(a \vee e)(a \wedge e) = [a(a \vee e) \wedge (a \vee e)](a \wedge e).$$

如果 a 和 e 可比较, 设 $e < a$, 则 $e \vee a = a, e \wedge a = e$, 由上面证明 $(a, e) \notin \mathcal{D}$. 同理可证 $a \geq e$ 时也有 $(a, e) \notin \mathcal{D}$. 如果 $a \| e$,

$$[a(a \vee e) \wedge (a \vee e)](a \wedge e) = a(a \wedge e) \wedge (a \vee e)(a \wedge e)$$
$$= a \wedge [a(a \wedge e) \vee (a \wedge e)] = a \wedge (a \vee (a \wedge e)) = a,$$

和 $a \wedge e \neq a$ 矛盾. □

推论 5.4.6 设 $a||e$, 则 $\{a, e, a \vee e, a \wedge e\}$ 属于四个不同的 $\mathcal{D}$ 类.

证明 根据引理 5.4.5 直接得出. □

引理 5.4.7 设 $a \leq e, a' \leq e$, 则 $aa' = a'a = a \wedge a'$. 如果 $(a, a') \in \mathcal{D}$, 则 $a = a'$.

证明 因为 $a \leq e, a' \leq e$, 所以 $aa' \leq a', aa' \leq a$, 即 $aa' \leq a \wedge a'$. 另一方面 $(a \wedge a')^2 = a \wedge a' \leq aa'$, 故 $aa' = a \wedge a'$. 同理可证 $a'a = a \wedge a'$.

如果 $(a, a') \in \mathcal{D}$, $a = aa'a = (a \wedge a')a = a \wedge a'a = a'a$; 又

$$a' = a'aa' = (a \wedge a')a' = a' \wedge aa' = aa',$$

所以 $a = a'$. □

在引理 5.4.7 中如果将 $a \leq e, a' \leq e$, 换成 $a \geq e, a' \geq e$, 则我们有 $aa' = a'a = a \vee a'$. 如果 $(a, a') \in \mathcal{D}$, 则 $a = a'$.

推论 5.4.8 设 S 的 $\mathcal{D}$ 类个数至多 3 个, 则 $|S| \leq 5$ 且 S 是全序的.

证明 由推论 5.4.6 和引理 5.4.7 得出. □

引理 5.4.9 设 $(a, b) \in \mathcal{D}$ 且 $(a \wedge e, b \wedge e) \in \mathcal{D}$ (或 $(a \vee e, b \vee e) \in \mathcal{D}$), 则 $a = b$.

证明 由引理 5.4.7, $a \wedge e = b \wedge e$, 因此

$$a = (e \wedge a)a = (e \wedge b)a = a \wedge ba = a(e \wedge a) = a(e \wedge b) = a \wedge ab.$$

得出 $a \leq ab \wedge ba$. 同理可证 $b \leq ab \wedge ba$, 即

$$a \vee b \leq ab \wedge ba.$$

由引理 5.4.2 得 $ab = a \vee b = ba$. 又 $(a,b) \in \mathcal{D}$, 所以 $a = aba = a(a \vee b) = a \vee ab = a \vee (a \vee b) = a \vee b$, $b = bab = a \vee b$, 因此 $a = b$. □

推论 5.4.10 设一个 $\mathcal{D}$ 类包含 n 个元素，那么带单位元 e 的带 S 至少有 n 个不同的 $\mathcal{D}$ 类.

证明 设 S 的一个 $\mathcal{D}$ 类为 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$. 由引理 5.4.9, $e \notin \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 且 $a_i \wedge e \not\equiv a_j \wedge e(\mathcal{D}), i \neq j$. □

设 S 的 $\mathcal{D}$ 类集为 S^*, 则 S^* 为下半格，其中 S^* 上的序关系 $\preceq$ 如下：

$$D_a \preceq D_b \Leftrightarrow D_{ab} = D_a,$$

且 D_e 为最大元. 如果 S^* 是有限集，则 D_e 一定是某个 D_i 的覆盖.

引理 5.4.11 设 D_e 是 D_i 的覆盖， D_i 中至多有两个元素 a_i, b_i 且 $a_i < u < b_i$.

证明 设 $a \in S$ 且 $D_a = D_i$, 则

$$a(a \vee e) = a, a(a \wedge e) = a,$$

故 $D_a \preceq D_{a \vee e}$ 和 $D_a \preceq D_{a \wedge e}$, 则 $D_{a \vee e} = D_a$ 或 D_e , 即 $a \leq e$ 或 $a \geq e$, 故 D_a 中任意元均和 e 可比较. 由引理 5.4.7, D_a 中元素不超过两个 a_i, b_i 且 $a_i < e < b_i$. □

定理 5.4.12 设 S 是带单位元的格序带且有 k 个不同的 $\mathcal{D}$ 类，则 S 中至多有 $k(k-2)+3$ 个元素.

证明 因为 $|D_e| = 1$, 设 D_i 的覆盖为 D_e, 由引理 6.4.11, $|D_i| \leq 2$, 剩下 $k-2$ 个 $\mathcal{D}$ 类，由引理 5.4.10, 每个 $\mathcal{D}$ 类中所含元素个数至多有 k 个，故

$$|S| \leq k(k-2)+3.$$ □

显然我们有下面的推论

推论 5.4.13 设 S 为一个有单位元的带有有限的 $\mathcal{D}$ 类，如果 S 可以格序化，则 S 一定是有限的. □

证明 由定理 5.4.12 直接推出.

§5 格序 Rees 矩阵半群

本节主要给出格序完全单 Rees 矩阵半群的性质和结构，主要结果参见 [76]. 本节所说的格序半群均为分配的.

设 $S=\mathcal{M}^0(G;I,\Lambda,P)$, P 为正则的，则 S 为完全 0 单半群. 设 S 也是格序半群，则

命题 5.5.1 设 $(a)_{iu}\leq(a)_{ju}$, 则 $(x)_{iu}\leq(x)_{ju},\forall x\in G$；设 $(a)_{i\lambda}\leq(a)_{iu}$, 则 $(y)_{i\lambda}\leq(y)_{iu},\forall y\in G$.

证明 设 $(a)_{iu}\leq(a)_{ju}$, 因为

$$(a)_{iu}=(p_{\lambda j}^{-1})_{i\lambda}\circ(a)_{ju},(a)_{ju}=(p_{\lambda j}^{-1})_{j\lambda}\circ(a)_{ju},$$

所以

$$(a)_{ju}=(a)_{iu}\vee(a)_{ju}=[(p_{\lambda j}^{-1})_{i\lambda}\vee(p_{\lambda j}^{-1})_{j\lambda}]\circ(a)_{ju},$$

令 $(p_{\lambda j}^{-1})_{i\lambda}\vee(p_{\lambda j}^{-1})_{j\lambda}=(c)_{jv}$, 则 $a=cp_{jv}a$, $c=p_{jv}^{-1}$, 由于以上运算和 a 没有直接的关系，故

$$(x)_{iu}\vee(x)_{ju}=(p_{jv}^{-1})_{jv}\circ(x)_{ju}=(x)_{ju},$$

同理可证另一情形. □

命题 5.5.2 S 的每个 $\mathcal{H}$ 类是格序群，且所有 $\mathcal{H}$ 类是同构的，G 可以看作为 $S=\mathcal{M}^0(G;I,\Lambda,P)$ 的子格序群.

证明 S 的每个 $\mathcal{H}$ 类 $H_{i\lambda}=\{(a)_{i\lambda}\mid a\in G\}$，因此 S 的每个 $\mathcal{H}$ 类均同构于群 G. 设 $(a)_{i\lambda},(b)_{i\lambda}\in H_{i\lambda}$,

$$\begin{aligned}(a)_{i\lambda}\vee(b)_{i\lambda} &= [(p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda}\vee(ab^{-1}p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda}]\circ(b)_{i\lambda}\\ &= (b)_{i\lambda}\circ[(p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda}\vee(p_{\lambda i}^{-1}b^{-1}a)_{i\lambda}].\end{aligned}$$

所以 $(a)_{i\lambda}\vee(b)_{i\lambda}$ 和 $(b)_{i\lambda}$ 在同一 $\mathcal{H}$ 类中，同理可证对偶的情形，故 $H_{i\lambda}$ 为 S 的子格，即每个 $\mathcal{H}$ 类为 S 的子格序群. □

在上命题的引导下，我们可以诱导群 G 上的序关系，$\forall a,b\in G$，

$$\begin{aligned}a\le b &\Leftrightarrow (\exists i\in I)\ (\exists\lambda\in\Lambda)\ (a)_{i\lambda}\le(b)_{i\lambda},\\ &\Leftrightarrow (\forall i\in I)\ (\forall\lambda\in\Lambda)\ (a)_{i\lambda}\le(b)_{i\lambda}.\end{aligned}$$

命题 5.5.3 如果 $(a)_{iu}\le(a)_{ju}$，则 $p_{vi}\le p_{vj},\forall v\in\Lambda$；如果 $(a)_{iu}\le(a)_{i\lambda}$，则 $p_{uj}\le p_{\lambda j},\forall j\in I$.

证明 设 $(a)_{iu}\le(a)_{ju},\forall(c)_{kv}\in S$,

$$(c)_{kv}\circ(a)_{iu}=(cp_{vi}a)_{ku}\le(ap_{vj}a)_{kv}=(c)_{kv}\circ(a)_{ju},$$

由上说明，$cp_{vi}a\le cp_{vj}a\Rightarrow p_{vi}\le p_{vj}$，$\forall v\in\Lambda$. 同理可证另一情形. □

命题 5.5.4 $\lambda\in\Lambda,(a)_{i\lambda}\vee(a)_{j\lambda}$ 有形式 $(b)_{k\lambda}$；$\forall i\in I$, $(a)_{iu}\vee(a)_{iv}$ 有形式 $(c)_{iq}$.

证明可参见命题 5.5.1.

下面我们讨论的格序 Rees 矩阵半群 $S=\mathcal{M}^0(G;I,\Lambda,P)$ 中的 P 为正规夹心矩阵，即存在 λ_0 行和 i_0 列的所有元素均为 1.

命题 5.5.5 设 S 为格序 Rees 矩阵，则

1) $\forall i,\forall j,\exists k\ \ (a)_{iu}\vee(a)_{ju}=(a)_{ku}\ \ \forall a,\forall u$；

2) $\forall u,\forall v,\exists\lambda\ \ (a)_{iu}\vee(a)_{iv}=(a)_{i\lambda}\ \ \forall a,\forall i$.

证明 首先我们证明

$$(1)_{i\lambda_0} \vee (1)_{j\lambda_0} = (1)_{k\lambda_0}.$$

由命题 5.5.4, $(1)_{i\lambda_0} \vee (1)_{j\lambda_0} = (c)_{k\lambda_0}$ ，在等式两边同乘以 $(1)_{k\lambda_0}$ 得

$$\begin{aligned}(1)_{k\lambda_0} \circ [(1)_{i\lambda_0} \vee (1)_{j\lambda_0}] &= (p_{\lambda_0 i})_{k\lambda_0} \vee (p_{\lambda_0 j})_{k\lambda_0} \\ &= (1)_{k\lambda_0} \circ (c)_{k\lambda_0} = (p_{\lambda_0 k} c)_{k\lambda_0}.\end{aligned}$$

因为 $p_{\lambda_0 i} = p_{\lambda_0 j} p_{\lambda_0 k} = 1$, 所以 $(1)_{k\lambda_0} = (p_{\lambda_0 k})_{k\lambda_0} = (c)_{k\lambda_0}$ ，故 $c = 1$. 又因为

$$\begin{aligned}(a)_{iu} \vee (a)_{ju} &= [(p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda} \vee (p_{\lambda i}^{-1})_{j\lambda}] \circ (a)_{iu}, \forall \lambda \in \Lambda \\ &= [(p_{\lambda_0 i}^{-1})_{i\lambda_0} \vee (p_{\lambda_0 i}^{-1})_{i\lambda_0}] \circ (a)_{iu} \\ &= [(1)_{i\lambda_0} \vee (1)_{j\lambda_0}] \circ (a)_{iu} \\ &= (1)_{k\lambda_0} \circ (a)_{iu} = (a)_{ku}.\end{aligned}$$

同理我们利用 $p_{\lambda i_0} = 1, \forall \lambda \in \Lambda$ 事实可得另一等式. □

命题 5.5.5 中将 “∨” 换成 “∧” 显然也成立.

命题 5.5.6 设 S 为格序 Rees 矩阵半群, 则 I 和 Λ 也为分配格.

证明 我们仅证 I 为分配格. 首先在 I 上我们定义二元运算:

$$\begin{aligned} f &: I \times I \to I \mid (i,j) \to f(i,j), (1)_{i\lambda_0} \vee (1)_{j\lambda_0} = (1)_{f(i,j)\lambda_0}, \\ g &: I \times I \to I \mid (i,j) \to g(i,j), (1)_{i\lambda_0} \wedge (1)_{j\lambda_0} = (1)_{g(i,j)\lambda_0}.\end{aligned}$$

显然 $f(i,j) = f(j,i), f(i,i) = i$, 进一步地, f 满足结合律和吸收性, 事实上,

$$[(1)_{i\lambda_0} \vee (1)_{j\lambda_0}] \vee (1)_{k\lambda_0} = (1)_{f(i,j)\lambda_0} \vee (1)_{k\lambda_0}$$

$$
\begin{aligned}
&= (1)_{f[f(i,j),k]\lambda_0} \\
&= (1)_{i\lambda_0} \vee [(1)_{j\lambda_0} \vee (1)_{k\lambda_0}] = (1)_{i\lambda_0} \vee (1)_{f(j,k)\lambda_0} \\
&= (1)_{f[i,f(j,k)]\lambda_0},
\end{aligned}
$$

即 $f[f(i,j),k] = f[i,f(j,k)]$. 类似可验证 g 有与 f 相同的性质及

$$g[i,f(i,j)] = i, f[i,g(i,j)] = i.$$

根据格的定义 (I,f,g) 为格. 由 S 为分配的, 得 (I,f,g) 为分配格. □

定理 5.5.7 设 $S = \mathcal{M}^0(G;I,\Lambda,P)$ (P 为正规的) 为格序半格, 则 I 与 Λ 为分配格, 且 $\Lambda \times I$ 到 G 存在保序映射.

证明 我们仅证后一部分. 定义

$$\varphi : \Lambda \times I \to G \mid (\lambda, i) \to p_{\lambda i}.$$

因为 Λ 和 I 均为格, 所有可常规定义 $\Lambda \times I$ 上的序关系 $(\lambda,i) \leq (u,j) \Leftrightarrow \lambda \leq u, i \leq j$, 则 $\Lambda \times I$ 为格. 如果 $(\lambda,i) \leq (u,j)$, 则 $(1)_{i_0\lambda} \leq (1)_{i_0u}, (1)_{i\lambda_0} \leq (1)_{j\lambda_0}$. $\forall k, v, \forall a \in G$,

$$(a)_{k\lambda} = (a)_{k\lambda} \circ (1)_{i_0\lambda} \leq (a)_{k\lambda} \circ (1)_{i_0u} = (a)_{ku},$$

同理 $(a)_{iv} \leq (a)_{jv}$. **根据命题** 5.5.3, $p_{vi} \leq p_{vj}, \forall v \in \Lambda$, $p_{\lambda k} \leq p_{uk}, \forall k \in I$, 取 $k = i, v = u$, 即 $p_{\lambda i} \leq p_{uj}$. □

最后我们试图来构造格序 Rees 矩阵半群.

设 G 为格序群, Λ 和 I 为分配格, 我们构造 Rees 矩阵半群 $S = \mathcal{M}^0(G;I,\Lambda,P)$, 这里 P 为夹心矩阵且 P 的每个元素为 G 的单位. 定义 S 上的二元关系 "$\leq$" 如下:

$$(a)_{i\lambda} \leq (b)_{ju} \Leftrightarrow \lambda \leq u, i \leq j, a \leq b,$$

则 S 也为格序半群. 事实上,

$$(a)_{i\lambda}\vee(b)_{ju}=(a\vee b)_{i\vee j,\lambda\vee u},(a)_{i\lambda}\circ(b)_{ju}=(ab)_{iu},$$

$$(x)_{kv}\circ((a)_{i\lambda}\vee(b)_{ju})=(x)_{kv}\circ(a\vee b)_{i\vee j,\lambda\vee u}=(x(a\vee b))_{k(\lambda\vee u)},$$

$$(x)_{kv}\circ(a)_{i\lambda}\vee(x)_{kv}\circ(b)_{ju}=(xa)_{k\lambda}\vee(xb)_{ku}=(xa\vee xb)_{k(\lambda\vee u)}.$$

故

$$(x)_{kv}\circ((a)_{i\lambda}\vee(b)_{ju})=(x)_{kv}\circ(a)_{i\lambda}\vee(x)_{kv}\circ(b)_{ju}.$$

其他表达式可类似验证, 略.

§6 格序周期半群

本节讨论一类特殊的格序半群即格序周期半群 S, 也就是说 $\forall a\in S$, a 的阶是有限的. 这里的格是分配格, 本节主要结果来自 [77, 78].

命题 5.6.1 设 S 是格序周期半群, $S=(a)$ 且 $|S|<\infty$, 如果 S 的阶为 n, 则 $\{a^n\}$ 是 S 的惟一子群, a^n 为 S 的零元且 S 是全序的.

证明 设 $S=\{a,a^2,\cdots,a^r,\cdots,a^n\}$, $K=\{a^r,\cdots,a^n\}$ 为 S 的 $n-r+1$ 阶周期子群且 $a^{n+1}=a^r$. 设 K 的幂等元为 $a^k=e$, 则 $k\geq r$ 且存在 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$ 使得 $(e\vee a)^k=(a^i)^k=e$, 由 S 是可换的, 则 $ea\leq(e\vee a)k\leq e$. 另一方面

$$ea^k=e\leq ea^{k-1}\leq\cdots\leq ea\leq e,$$

故 $ea=ae=e$, 显然 $K=\{e\}$, 即 $e=a^n$.

设 a 与 a^2 不可比, 则 $a\vee a^2=a^i,i>2,a\wedge a^2=a^j,j>2$. 由 $a\wedge a^2=a^j$, 得 $a^{n-1}\wedge a^n=a^{j+n-2}=ea^{j-2}=e=a^n$, $a^n<a^{n-1}$. 同理由 $a\vee a^2=a^i$ 得 $a^n>a^{n-1}$, 矛盾. □

命题 5.6.2 每个格序幂零半群是局部有限的.

证明 设 $a_1, a_2, \cdots, a_p \in S$, $A =< a_1, a_2, \cdots, a_p >$, 因为 S 为幂零的, 存在 $n \in \mathbf{Z}^+$ 使得

$$\begin{aligned} a_1^n &= a_2^n = \cdots = a_p^n \\ &= (a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_p)^n \\ &= (a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_p)^n = 0. \end{aligned}$$

设 $a \in A$, 则 $a = \prod_{i=1}^{N} x_i$, $x_i \in \{a_1, a_2, \cdots, a_p\}$. 如果 $N \geq n$, 则

$$a = (x_1 x_2 \cdots x_n) x_{n+1} \cdots x_N.$$

因为

$$(\forall i \in \{1, 2, \cdots, p\}) \;\; a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots a_p \leq x_i \leq (a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_p),$$

故

$$\begin{aligned} 0 &= (a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots a_p)^n x_{n+1} \cdots x_N \\ &\leq a \leq (a_1 \vee a_2 \vee \cdots a_p)^n x_{n+1} \cdots x_N = 0. \end{aligned}$$

这就证明了 A 中任意非 0 元至多为 $\{a_1, a_2, \cdots, a_p\}$ 中 $n-1$ 个元素之积, 即 $|A| < \infty$. □

设 S 为周期半群, 在 S 上定义二元关系 $\mathcal{F}$

$$(x, y) \in \mathcal{F} \Leftrightarrow (\exists e \in S) \; e^2 = e, (\exists n \in Z^+) \; x^n = y^n = e,$$

则 $\mathcal{F}$ 为 S 上的等价关系. $\mathcal{F}$ 的每个等价类称为 S 的心轴 (spindle), 记为 F_e , 这里 e 为 F_e 所含的幂等元. 在 [77] 中我们已知如果 S 为全序的, 则 F_e 为 S 的子半群.

定理 5.6.3 设 S 为格序周期半群且 $E(S)$ 是 S 的双单子半群, 则 F_e 是 S 的凸子格且以 e 为零元的幂等子半群.

证明 1) e 为 F_e 的零元. $\forall x \in F_e$, 则 $x^n = e$,

$$\begin{aligned} xe &= ex = x^{n+1}, \\ (x \vee e)^n &= x^n \vee x^{n-1}e \vee x^{n-2}e \vee \cdots \vee xe \vee e \\ &= x^{n-1}e \vee x^{n-2}e \vee \cdots \vee xe \vee e, \\ x(x \vee e)^n &= x^n e \vee x^{n-1}e \vee \cdots \vee x^2 e \vee xe \\ &= e \vee x^{n-1}e \vee x^{n-2}e \vee \cdots \vee x^2 e \vee xe. \end{aligned}$$

因此 $x(x \vee e)^n = (x \vee e)^n$, 从而 $\forall k, x^k(x \vee e)^n = (x \vee e)^n$.

$$(x \vee e)(x \vee e)^n = x(x \vee e)^n \vee x^n(x \vee e)^n = (x \vee e)^n.$$

令 $f = (x \vee e)^n$, 则 $f^2 = f$ 且 $xf = fx = f$, 当然 $ef = fe = f$. 又 $E(S)$ 是双单子半群, 所以 $E(S)$ 的 $\mathcal{D}$ 类为平凡的, 从而 $efe = e, fef = f$, 故 $e = f$. e 为 F_e 的零元.

2) 设 $x, y \in F_e$, 则 $x^n = y^n = e$, 由 1) 从而 $(x \vee y)e = e$. 如果 $x \vee y \in F_g, g^2 = g$. 因为 $E(S)$ 为双单的, 所以 $ege = e, geg = g$. 由 $x \vee y \in F_g$, 存在 $m \in Z^+$ 使得 $(x \vee y)^m = g$, 故

$$(x \vee y)^m e = e(x \vee y)^m = eg = ge = e,$$

因此 $g = e$. 同理可证 $x \wedge y \in F_e$. 如果 $x \leq a \leq y$, $x, y \in F_e$, 则 $e = x^n \leq a^n \leq y^n = e$, 即 $a^n = e, a \in F_e$.

从 $(a \wedge b)^2 \leq ab \leq (a \vee b)^2$ 可得 F_e 为 S 的子半群. 子格 F_e 的凸性是显然的. □

设 S 为序半群, 称 S 为弱负序的, 如果 $x^2 \leq x, \forall x \in S$. 下面我们讨论弱负序格序周期半群 S 且分配格 S 的高 (height) 是有限的.

引理 5.6.4 设 S 为弱负序格序周期半群, 则下列各款成立:

1) F_e 中 e 为最小元且为 F_e 中的零元;

2) 设 $a \in F_e$ 且 a 的高 $h(a) = 2$, 设 $b \in F_e, h(b) = 1$, 且 b 与 a 可比较, 则 $ab = ba = e$ 或 $ab = ba = a^2$;

3) 设 $a, b \in F_e$ 且 $h(a) = h(b) = 1$, 则 $ab = ba = e$;

4) 设 $a, b \in F_e$ 且 $h(a) = 1, h(b) = 2$, 则 $h(ba) = 1$ 或 $ba = e$, 即 $h(ba) = 0$.

证明 1) 显然. 2) 设 $e < b < a$, $h(b) = 1, h(a) = 2$. 只有 $b^2 = e$. 又

$$e \leq ab \leq (a \vee b)^2 \leq a \vee b = a,$$

则 $ab = a$ 或 $ab \geq e$. 如果 $ab = a$, 则 $ab^2 = ab = a = ae = e$, 矛盾. 另一方面, 如果 $ab = b$, 则 $a^ib = b = e$, 矛盾. 只有 $ab = e$ 或 $e < ab < a, ab \neq b$.

如果 $a^2 = e$, 则由 $e \leq ab \leq a^2, e \leq ba \leq a^2$ 得 $ab = ba = e$; 如果 $a^2 \neq e$, 则 $e < a^2 < a$, 且 $a^3 = e, h(a^2) = 1$. 我们有两种情形: 如果 $a^2 = b$, 则 $ab = ba = e$; 如果 $a^2 \vee b = a$, 则 $a^3 \vee ab = a^2 = e \vee ab = ab = a^3 \vee ba = ba$.

3) 设 $a \neq b$, 则 $a \wedge b = e, ab \leq (a \vee b)^2 \leq a \vee b$, 且 $ab \neq a \vee b$, 否则 $a \leq ab$, 从而 $e < a \leq ab \leq ab^2 = e$, 矛盾. 因为格 S 是分配的且 $a \vee b$ 为 a 和 b 的覆盖, 所以 $h(a \vee b) = 2$. 由 2), $a(a \vee b) = (a \vee b)a$, 即 $ab = ba$. 由 $e \leq ab < a \vee b$ 可得 $h(ab) = 1$ 或 $h(ab) = 0$. 如果 $h(ab) = 1$, 因为 $ab \neq a, b$, 所以 $\{e, a, b, ab, a \vee b\}$ 构成 S 中的菱形和 S 是分配格矛盾, 故 $ab = ba = e$.

4) 设 $h(a) = 1, h(b) = 2$, 如果 $e < a < b$, 则由 2) 结论成立. 设 $e < a$ 且 $e < b_1 < b, a \wedge b_1 = e, a \vee b_1$ 是 a 和 b_1 的覆盖, 所以 $h(a \vee b_1) = 2, h(a \vee b) = 3$, 且 $b = a \vee b_1$. 另一方面在 F_e 中, 设 $e \neq x, y \in F_e, xy \neq x \vee y$, 否则 $x^2y = x^2 \vee xy = x^2 \vee x \vee y = x \vee y$, 归纳地可得 $x \vee y = x^2y = x^3y = \cdots = x^ny = e$, 矛盾.

因此 $ba < a \vee b, ab < a \vee b$ 且 $ab \neq a, b, ba \neq a, b$.

设 $h(ba) = 2$, 则 $a \not< ba$, 否则 $ba \leq b^2a \leq ba$, 由此推出

$$ba = b^2a = ... = b^ka = e,$$

矛盾. 当然有 $a \vee b_1 \neq ba, a \wedge ba = e$. 如果 $b_1 < ba$, 则 $\{b_1, b, ba, a \vee b_1, a \vee b\}$ 构成 S 中的菱形, 和 S 为分配格矛盾. 所以 $b_1 \not< ba$. 由此推出 $\{e, ba, a, a \vee b_1, a \vee b\}$ 构成 S 中的五边形也和 S 为分配格矛盾. 故 $h(ba) = 1$ 或 0 . □

定理 5.6.5 设 S 为有限的弱负序格序半群且 F_e 为心轴, $a, b \in F_e$, $h(a) = 2, h(b) = 1$, 则要么 $ab = ba$ 且 $h(ab) = 1$ 或 0; 要么 $ab \neq ba$, 其中一个元的高为 1, 另一个为 0.

证明 如果 $e < b < a$, 由上引理 (2), 则 $ab = ba$, 且 $ab = ba = e$ 或 $ab = ba = a^2$, 这时 $h(ab) = 1$, 或 0.

如果 $a||b$, 则存在 $b_1 \in S, e < b_1 < b$ 且 $a||b_1$, 由引理 5.6.4 (4), $h(ba)$ 和 $h(ab)$ 为 1 或 0 . 如果 $ab \neq ba$, 且 $h(ab) = h(ba) = 1$, 显然 $b \neq ab, ba$, 否则 $ab = ba = e$. 又

$$ab \wedge b = ba \wedge b = e, \quad ab \wedge ba = e.$$

因为 S 为分配格, 所以 $ab \vee b \neq ba \vee b$, 因此 $h(ab \vee b) = h(ba \vee b) = 2$. 因为 $ab \vee b || ba \vee b$, 所以 $h(ab \vee b \vee ba) \geq 3$.

在有限分配格 S 中,

$$h(x) + h(y) = h(x \wedge y) + h(x \vee y),$$

$\forall x, y \in S$. 所以 $h(a \vee b) = h(a) + h(b) = 3$. 又

$$(ab \vee b) \vee (ba \vee b) \leq (a \vee b)^2 \leq a \vee b,$$

所以 $h(ab \vee b \vee ba) = 3$ 且 $ab \vee b \vee ba = a \vee b$. 另一方面,

$$(ab \vee ba) \wedge b = (ab \wedge b) \vee (ba \wedge b) = e = a \wedge b,$$

由 S 为分配格得 $ab \vee ba = a$. 这样,

$$ab = bab \vee ab^2 = bab \vee e = bab \quad (ab > e)$$

推出 $ab = b^2ab = e$, 因为 $h(ab) = 1$, 不可能. 由上证明得出如果 $ab \neq ba$, 则 $h(ab), h(ba)$ 必有一个为 1, 另一个为 0 . □

引理 5.6.6 设 S 为格序周期半群, e 为 $E(S)$ 的极大元, 则 e 为 $E(S)$ 的最大元.

证明 设 $e \in E(S)$ 是极大的, $f \in E(S)$, 则 $e \leq (e \vee f)^n, \forall n \in \mathbf{Z}^+$. 因为 S 为周期半群, 存在 p 使得 $(e \vee f)^p$ 是幂等元, 所以 $e = (e \vee f)^p \geq f$. □

在引理 5.6.6 中, 设 $f \in E(S)$, 则 $f \leq e$, 因此

$$ef = e \cdot f^2 \cdot f \leq (ef)^2 = ef \cdot ef \leq e \cdot e^2 f = ef,$$

即 ef 为幂等元. 同理可证 fe 也为幂等元.

引理 5.6.7 设 S 为有限弱负序格序半群, e 为 S 的最大幂等元. 设 $f \in E(S)$ 且 e 为 f 在 $E(S)$ 中的覆盖, 则 $\forall k \neq 0, \forall b \in F_f$,

$$be \leq e, eb \leq e, (e \vee b)^k = e \vee b^k.$$

证明 因为 S 有限, 存在 $n \in \mathbf{Z}^+$ 使得 $(e \vee b)^n$ 为幂等元, 又 $(e \vee b)^n \geq e$. 由假设得 $e = (e \vee b)^n$. 因此 $be, eb \leq e$, 则 $(e \vee b)^k = e \vee b^k$. □

设 F_e 和 F_f 为 S 的心轴, 我们称 $F_f < F_e$, 如果 $\forall x \in F_f$, $\forall y \in F_e$ 均有 $x < y$.

定理 5.6.8 设 S 为弱负序格序周期半群, $e, f \in E(S)$ 且 $f \prec e$(在 $E(S)$ 中 e 覆盖 f), 则 F_f 是幂零半群. 进一步地,

如果 $F_f < F_e$, $(F_f)^2 \neq \{f\}$, 则 $ef = e$ 当且仅当 $fe = e$, 这时 $F_eF_f = F_fF_e = \{e\}$.

证明 设 $ef = e, a \in F_f, b \in F_e$, 则 $f \leq a < e \leq b$, 结果 $ef = e \leq ba \leq be = e$, 因此 $ba = e$, 即 $F_eF_f = e$. 又 $f < e$, 则 fe 是在 e 和 f 之间的幂等元, 由 e 覆盖 f , 只有 $fe = e$ 或 $fe = f$.

如果 $fe = f$, 取 $x \in F_f$, 则 $f \leq x < e$, $f \leq x^2 \leq xe \leq e$, 从而 $f \leq (xe)^k \leq e, \forall k \in Z^+$. 因为 $f \prec e, F_f < F_e$, 所以 $xe \in F_f$ 或 $xe \in F_e$. 如果 $xe = a \in F_e$, 则 $xe^2 = ae = xe = e$, 从而 $x^ke = e, \forall k \in Z^+$. 因为 $x \in F_f$, 所以存在 $k \in Z^+$ 使得 $x^k = f$, 故 $fe = e$, 矛盾. 只有 $xe = y \in F_f$, $(xe)(xe) = x(ex)e = xe = y$ $(F_eF_f = e)$. 因为 f 为 F_f 的幂等元, $y \in F_f$, 只有 $y = f$. 由 x 的任意性得 $F_f \cdot e = f$. 又由假设 $(F_f)^2 \neq \{f\}$, 存在 F_f 中两个不同元 r, s 使得 $f < r < e, f < s < e, f \neq rs$, 从而 $f = fr \leq rs \leq re = f$, 和 $f \neq rs$ 矛盾. 故 $ef = e$ 可导出 $fe = e$ 且 $F_eF_f = F_fF_e = e$. 对称地, 由 $fe = e$ 可推出 $ef = e$.

下面证 F_f 是子半群. 如果 $F_f^2 = \{f\}$, 显然 F_f 是以 f 为零元的幂零子半群. 如果 $F_f^2 \neq \{f\}$, 设 $x, y \in F_f$, $f \leq x < e, f \leq y < e$, 则 $f \leq (xy)^n \leq e, \forall n \in Z^+$. 所以 $xy \in F_e \cup F_f$. 如果 $xy \in F_e$, 则 $xy = e$. 设 $x^n = y^n = f$, 则 $f = x^{n+1}y^{n+1} = x^ney^n = fef$, 结果 $ef = e = fe$ 不可能成立. 因为从 $f = fef$ 得出 ef 和 fe 均为在 f 与 e 之间的幂等元, 只有 $fe = ef = f$. 另一方面 $x < e, y < e$ 得 $xy \leq ey \leq e = xy$. 所以 $ey = e, ef = e\ (= fe)$, 矛盾. 故 $xy \in F_f$, 显然 F_f 是幂零的. □

在定理 5.6.8 中, 如果没有 $F_f^2 \neq \{f\}$ 的假设, $ef \neq fe$ 是可能的. 例如 $S = \{f, b, b_1, e, a^2, a\}$, S 上的乘法定义如下:

$\cdot$	f	b	b_1	e	a^2	a
f	f	f	f	f	f	f
b	f	f	f	f	f	f
b_1	f	f	f	f	f	f
e	e	e	e	e	e	e
a^2	e	e	e	e	e	e
a	e	e	e	e	e	a^2

S 上的序关系为 $f < b < b_1 < e < a^2 < a$. 则 $(S, \cdot, \leq)$ 为全序弱负序周期半群, $F_f = \{f, b, b_1\}, F_f^2 = \{f\}$. 但 $ef \neq fe$.

本节最后我们给出周期弱序格序半群的构造.

设 $F_1, F_2, \cdots, F_n$ 为 n 个幂零半群且零元分别为 $e_1, e_2, \cdots, e_n$. 设 $(F_i, \leq_i)$ 为弱负序格序集且 e_i 为 F_i 的最小元. 令 $S = \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$, 我们定义 S 上的乘积如下:

$$(\forall x_i \in F_i, \forall y_j \in F_j) \quad x_i y_j = \begin{cases} x_i y_i, & i = j, \\ e_j, & i < j, \\ e_i, & j < i, \end{cases}$$

特别地, $e_i \cdot e_j = e_j \cdot e_i = e_j, i < j$ 或 $e_i, j \leq i$. S 的序关系定义如下:

$$x_i \leq y_j \Leftrightarrow i = j, x_i \leq_i y_j \text{ 或 } i < j,$$

则 $(S, \cdot, \leq)$ 为序半群. 事实上, 当 $i = j = k$ 时, $(x_i \cdot y_j) \cdot z_k = x_i \cdot (y_j \cdot z_k) = x_i y_j z_k$; 当 $\mathrm{Card}\{i, j, k\} \geq 2$ 时, $(x_i \cdot y_j) \cdot z_k = x_i \cdot (y_j \cdot z_k) = e_{\sup\{i,j,k\}}$. 由 $F_i, \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 的假设 S 为弱负序格序周期半群.

反之, 假设 S 为弱负序格序周期半群, $F_{e_1}, F_{e_2}, \cdots, F_{e_n}$ 是 S 的心轴且 $F_{e_1} < F_{e_2} < \cdots < F_{e_n}$. 又设 $e_{i+1}e_i = e_ie_{i+1} = e_{i+1}, i = 1, 2, \cdots, n-1$, 由定理 5.6.8 及其证明, 我们有 $F_{e_{i+1}} F_{e_i} =$

$F_{e_i}F_{e_{i+1}} = \{e_{i+1}\}$. 设 $i < k$ ，则

$$\begin{aligned} F_{e_i}F_{e_k} &\geq F_{e_i} \cdot e_k = F_{e_i} \cdot e_k^{k-i+1} \\ &\geq F_{e_i} \cdot e_i e_{i+1} \cdots e_k = e_i e_{i+1} \cdots e_k = e_k. \end{aligned}$$

又 $F_{e_i}F_{e_k} \leq e_k \cdot F_{e_k} = e_k$ ，故 $F_{e_i}F_{e_k} = e_k$. 类似地， $F_{e_k}F_{e_i} = e_k, i < k$.

综上讨论我们得出

定理 5.6.9 设 S 是 n 个弱负序格序幂零半群 F_{e_i} 的并，则 S 为弱负序周期半群且满足:

1) $F_{e_1} < F_{e_2} < \cdots < F_{e_n}$,

2) $e_i e_{i+1} = e_{i+1} e_i = e_{i+1}, i = 1, 2, \cdots, n-1$,

当且仅当 $F_{e_i}F_{e_j} = e_j, i < j$; $F_{e_i}F_{e_j} = e_i, j < i$.

第六章　序半群的表示

在序半群的研究中，把一个序半群表示为结构较为简单的序半群的直积 (亚直积) 等是我们常用的方法. 本章我们给出一些格序半群的表示定理.

一般序半群的表示由于其条件较小，所以还没有非常一般通用的表现定理 [51,79]，人们只是对一些较为特殊的序半群，如 [60,80—84] 等，进行讨论. 之所以这样主要由于两个方面的工作基础：一是有比较完整的格 (特别是分配格的分解表示理论体系)；另一方面是有比较完整的格序群或群表示理论体系. 我们有半群代数理论中比较成熟的半格分解理论，所以序半群的半格分解也就完善得多.

§1　格序半群的表示定理

早在 1940 年， Clifford 和 Lorenzen 就已经观察到 Able 格序群能表示成全序 Able 群的亚直积. 这导致引出格序群可表的定义，即称一个格序群是可表的如果它可表示成全序群的亚直积. 我们有定理：一个格序群 G 是可表的当且仅当 G 存在一个正规素子群集 $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Gamma}$ 且 $\bigcap G_\lambda=\{0\}$. 1963 年， L. Fuchs 提出了这一结论能否移植到格序半群这一公开问题. 本节我们给出了一个格序半群同构于一簇全序半群的亚直积 (可表的) 的充分必要条件，这些结果来自 [85].

设 S 为格序半群， $a,b\in S$, $\emptyset\neq H\subseteq S$, 我们定义 S 上两个二元关系：

$$\rho_H:=\{(a,b)\in S\times S\mid (H..a)=(H..b)\},$$

$$\rho'_H := \{(a,b) \in S \times S \mid (H..a)_1 = (H..b)_1\}.$$

这里 $(H..a) = \{(x,y) \in S \times S \mid xay \in H\}$, $(H..a)_1 = \{(x,y) \in S^1 \times S^1 \mid xay \in H\}$.

不难看出 ρ_H 和 ρ'_H 为半群结构 S 上的同余 (ρ_H 就是句法同余) . S 的子集 H 称为 $\wedge$ 素的 (l 素的), 如果 $a \wedge b \in H$, 则 $a \in H$ 或 $b \in H$.

定理 6.1.1 一个格序半群 S 允许非平凡的全序半群作为它的格序同态像当且仅当 S 存在一个 $\wedge$ 素的真的格理想 (l 理想) H 使得 $\{(H..a) \mid \forall a \in S\}$ 关于集的包含关系构成链.

证明 必要性 设 $\sum$ 为全序半群且 φ 为 S 到 $\sum$ 的满 l 同态. 因为 $\sum$ 非平凡, 取 $\sum$ 中两个不同元素 $\bar{a}, \bar{b}$, 不妨设 $\bar{a} < \bar{b}$, 则存在 $a, b \in S$ 使得 $\varphi(a) = \bar{a}$, $\varphi(b) = \bar{b}$. 作集合

$$H = \{x \in S \mid \varphi(x) \le \varphi(a)\},$$

则 $H \neq \emptyset$ 且 $H \neq S (b \notin H)$. 设 $x \in H, y \in S$ 且 $y \le x$, 显然 $y \in H$. 又设 $x, y \in H$, 则

$$\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y) \le \varphi(a).$$

因此 $x \vee y \in H$. 以上证明了 H 为 S 的 l 理想. 又设 $x \wedge y \in H$, 则

$$\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y) \le \varphi(a),$$

因为 $\varphi(x)$ 和 $\varphi(y)$ 可比较, 所以 $\varphi(x) \le \varphi(a)$ 或 $\varphi(y) \le \varphi(a)$, 即 $x \in H$ 或 $y \in H$.

设 $(H..t) \neq (H..s)$, 则存在 $x, y \in S$ 使得 $xsy \in H$, $xty \notin H$, 即 $\varphi(x)\varphi(s)\varphi(y) \le \varphi(a)$, 但 $\varphi(x)\varphi(t)\varphi(y) \not\le \varphi(a)$. 因此

$$\varphi(x)\varphi(s)\varphi(y) \le \varphi(a) < \varphi(x)\varphi(t)\varphi(y),$$

只有 $\varphi(s) < \varphi(t)$. $\forall(z,z_1) \in (H..t)$ ，则

$$\varphi(zsz_1) \leq \varphi(ztz_1) \leq \varphi(a),$$

故 $zsz_1 \in H$, 从而 $(z,z_1) \in (H..s)$, 即 $(H..t) \subseteq (H..s)$.

充分性　设 H 为 l 理想且 $\wedge$ 素的，且 $(a,b) \in \rho_H$，则 $\forall c \in S$, 如果 $x(a \vee c)y \in H, xay, xcy \in H$. 因此 $xby, xcy \in H$, 即 $x(b \vee c)y \in H$. 由此证得

$$(H..(a \vee c)) \subseteq (H..(b \vee c)),$$

同理可证反包含关系. 另一方面，设 $x(a \wedge c)y \in H$, 由 H 为 $\wedge$ 素可得 $xay \in H$ 或 $xcy \in H$, 即 $xby \in H$ 或 $xcy \in H$, 因此 $x(b \wedge c)y \in H$. 由此证得 $(H..(a \wedge c)) \subseteq (H..(b \wedge c))$ ，同理可证反包含关系. 综上所证 ρ_H 为 S 上的格序同余. 令 $S_H = S/\rho_H$, 要证充分性, 现在仅需证明 S/ρ_H 为全序半群即可. 设 $\bar{a}, \bar{b} \in S_H$, 因为 $(H..a)$ 和 $(H..b)$ 是有包含关系的, 不妨设 $(H..a) \subseteq (H..b)$, 下证 $(H..(a \wedge b)) = (H..a)$. 事实上, 设 $x(a \wedge b)y \in H$, 由 H 为 $\wedge$ 素的, 必有 $xay \in H$ 或 $xby \in H$, 不论如何, 由 $(H..a) \subseteq (H..b)$ 均可得 $xay \in H$, 因此

$$(H..(a \wedge b)) \subseteq (H..a).$$

反之，设 $(x,y) \in (H..a)$, 则 $xay \in H$, 从而 $x(a \wedge b)y \in H$, 故 $(H..a) \subseteq (H..(a \wedge b))$. 因此 $\bar{a} = \overline{a \wedge b} = \bar{a} \wedge \bar{b}$, 即 $\bar{a} \leq \bar{b}$. □

注 6.1.2 1) 在定理 6.1.1 必要性的证明过程中，不难看出 $\mathrm{Ker}\varphi \subseteq \rho_H$.

2) 在定理 6.1.1 中，如果把 $(H..a)$ 均换成 $(H..a)_1$ ，这时同余关系 ρ_H 变成了 ρ'_H. 我们看出这样的事实： H 的确定和 $\bar{a}$ 的选取，即和 a 的选取有关，不妨记

$$H_a = \{x \in S \mid \varphi(x) \leq \varphi(a)\},$$

这时 $\mathrm{Ker}\varphi \subseteq \bigcap_{a\in S} \rho'_{H_a}$, 又设 $(a,b) \notin \mathrm{Ker}\varphi$, 即 $\varphi(a) \neq \varphi(b)$, 不妨设 $\varphi(a) < \varphi(b)$, 这时 $(a,b) \notin \rho'_{H_a}$, 事实上, $(1,1) \in (H_a..a)_1$, 但 $(1,1) \notin (H_a..b)_1$. 故 $\mathrm{Ker}\varphi = \bigcap_{a\in S} \rho'_{H_a}$.

推论 6.1.3 格序可换半群 S 允许有非平凡的全序半群作为其格序同态像当且仅当 S 存在真 l 理想 H 且 $\wedge$ 素的.

证明 由定理 6.1.1, 我们仅需证明集合 $\{(H..a) \mid \forall a \in S\}$ 关于包含关系构成链. 设 $(H..a) \not\subseteq (H..b)$, 则存在 $x, y \in S$ 使 $xay \in H$ 但 $xby \notin H$. 由 H 为 l 理想, 不难得出 $x(a\wedge b)y \in H$. 设 $(z,t) \in (H..b)$, 则 $zbt \in H$, 从而 $z(a\wedge b)t \in H$. 再由 S 是可换的得 $(zt\vee xy)(a\wedge b) \in H$, 即 $(zt\vee xy)a\wedge(zt\vee xy)b \in H$. 因为 H 是 $\wedge$ 素的, $xby \notin H$, 从而 $(zt\vee xy)b \notin H$, 故 $(zt\vee xy)a \in H$, $zat \in H$, 即 $(z,t) \in (H..a)$. 由此我们证明了 $(H..b) \subseteq (H..a)$.

□

定理 6.1.4 一个格序半群 S l 同构于全序半群簇 $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 的亚直积当且仅当 S 存在 $\wedge$ 素的 l 理想簇 $\{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, 使得

1) $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} \rho'_\alpha = 1_S$;

2) $\forall\alpha \in \Gamma, \{(H_\alpha..s) \mid s \in S\}$ 关于集合包含关系构成链.

证明 必要性 设 φ 为 S 到 $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 亚直积的 l 同构, $p_\lambda \circ \varphi$ 为 S 到 S_λ 的投射, 记为 φ_λ. 则 φ_λ 为 S 到 S_λ 的 l 同态. 由注 6.1.2 , $\mathrm{Ker}\varphi_\lambda = \bigcap_{s\in S} \rho'_{H_{\lambda s}}$. 且

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Ker}\varphi_\lambda = \bigcap_{\lambda\in\Lambda, s\in S} \rho'_{H_{\lambda s}} = 1_S,$$

由定理 6.1.1, $\forall\lambda \in \Lambda, s \in S$, $\{(H_{\lambda s}..a) \mid a \in S\}$ 关于集合的包含关系构成链.

充分性 $\forall\alpha \in \Gamma$, 记 $S_\alpha = S/\rho'_{H_\alpha}$, 由定理 6.1.1, S_α 是 S

的 l 同态像且 S_α 为全序半群. 因为 $\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}\rho'_{H_\alpha}=1_S$, 故 S l 同构于 $\{S_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 的亚直积. □

推论 6.1.5 一个可换格序半群 S 是可表的当且仅当格 $(S,\vee,\wedge)$ 交关于并是分配的.

证明 设 S 是可表的, 即 S l 同构于全序半群簇 $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 的亚直积, 因为每个 S_λ 是分配格, 所以 S 是分配格.

反之, 设 $(S,\vee,\wedge)$ 中交关于并是分配的, 且 $\{H_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为 S 的所有 $\wedge$ 素的 l 理想集, 则 $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}\rho'_{H_\alpha}=1_S$. 事实上, 设 $a\neq b, a,b\in S$, 根据 Zorn 引理, 一定存在一个 $\wedge$ 素的 l 理想包含 a 但不含 b (见第零章) , 故 $(a,b)\notin\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}\rho'_{H_\alpha}$, 因此 $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}\rho'_{H_\alpha}=1_S$. 根据定理 6.1.4 及推论 6.1.3 , S 是可表的. □

下面我们给出一个半群可全序化的充要条件.

定理 6.1.6 一个半群 S 可全序化的充要条件是存在 S 的非空子集簇 $\{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 满足以下条件:

1) $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}\rho'_{H_\lambda}=1_S$;

2) $\forall\lambda\in\Lambda,\{(H_\lambda..a)_1\mid a\in S\}$ 关于集合包含关系构成链, 而且如果 $a,b\in S$, 则

$$(H_\lambda..a)_1\cap(H_\lambda..b)_1=(H_\lambda..a)_1,\forall\lambda\in\Lambda$$

或

$$(H_\lambda..a)_1\cap(H_\lambda..b)_1=(H_\lambda..b)_1,\forall\lambda\in\Lambda.$$

证明 必要性 设 S 为全序半群, 则 S 是可表的, 由定理 6.1.4, 1) 和 2) 成立.

充分性 $\forall\lambda\in\Lambda$, 记 $S_\lambda=S/\rho'_{H_\lambda}$, 在 S_λ 上定义二元关系

$$\leq_\lambda:=\{(a_\lambda,b_\lambda)\in S_\lambda\times S_\lambda\mid(H_\lambda..b)_1\subseteq(H_\lambda..a)_1\},$$

因为假设 2), $\leq_\lambda$ 为 S_λ 上的全序关系. 设 $a_\lambda \leq_\lambda b_\lambda$,

$$\forall (z, z_1) \in S^1 \times S^1, \quad zbz_1 \in H_\lambda \Rightarrow zaz_1 \in H_\lambda.$$

$\forall x \in S, zxbz_1 \in H_\lambda \Rightarrow zxaz_1 \in H_\lambda$, 故 $(xa)_\lambda \leq_\lambda (xb)_\lambda$, 即 $x_\lambda a_\lambda \leq_\lambda x_\lambda b_\lambda$, 同理可证 $a_\lambda x_\lambda \leq_\lambda b_\lambda x_\lambda$. 以上证明了 S_λ 关于 $\leq_\lambda$ 为全序半群. 由 1) $S \cong \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$. 现在我们定义 S 上的二元关系 $\leq$:

$$\leq := \{(a, b) \mid \forall \lambda \in \Lambda, a_\lambda \leq_\lambda b_\lambda,$$

由 1), $\leq$ 为 S 上的偏序关系. 设 $a, b \in S$ 且 $a \neq b$, 存在 μ 使得 $a_\mu \neq b_\mu$, 设 $a_\mu < b_\mu$, 即 $(H_\mu..b)_1 \subseteq (H_\mu..a)_1$. 由 2), $(H_\lambda..b)_1 \subseteq (H_\lambda..a)_1, \forall \lambda \in \Lambda$, 即 $a_\lambda \leq_\lambda b_\lambda$, 故 $a < b$. □

§2 分配格序幺半群的表示

1907 年, Hahn 证明了每个 Able 全序群可以表示为一个全序集上的实函数群, 后来 Conrad 和 Clifford 分别将 Hahn 的证明给予简化. 1963 年, Conrad, Harvey 和 Holland 把 Hahn 定理推广到格序群中, 后来称之为 Conrad-Harvey-Holland 定理, 即任意 Able 格序群可表为一个偏序集 (实际上为根系) 上实函数群 (参见有关格序群的书籍例如 [86]). 当然人们希望将该定理推广到格序半群中, 这就是本节所谈及的内容 [87].

设 T 是全序集, $S(T)$ 为 T 上的保序映射集, 则 $S(T)$ 关于映射的合成和通常函数的交和并构成格序幺半群. 设 $\emptyset \neq H \subseteq S$, 我们定义 S 上的两个二元关系:

$$\mathcal{R}_H := \{(a, b) \mid (a)H = (b)H\},$$

$$_H\mathcal{R} := \{(a, b) \mid H(a) = H(b)\},$$

这里 $(a)H = \{x \in S \mid ax \in H\}, H(a) = \{x \in S \mid xa \in H\}$.

引理 6.2.1 设 S 为格序半群，H 为 S 的 $\wedge$ 素的 l 理想，$a,b\in S$，则

1) $(a)H$ 为 S 的 $\wedge$ 素 l 理想;
2) $(a\wedge b)H=(a)H\cup(b)H,(a\vee b)H=(a)H\cap(b)H$;
3) $\{(a)H\mid a\in S\}$ 关于集包含关系是全序集;
4) $\mathcal{R}_H$ 为 S 的右关系同余且 $S/\mathcal{R}_H$ 是全序集.

证明 1) 和 2) 仅是简单的验证.

3) 设 $(a)H\not\subseteq(b)H$，存在 $x\in(a)H\backslash(b)H$. $\forall y\in(b)H$，由 1) 和 2)

$$x\wedge y\in(a)H\cap(b)H=(a\vee b)H,$$

因此 $x\in(a)H\cap(b)H$ 或 $y\in(a)H\cap(b)H$. 因为 $x\notin(b)H$，所以 $y\in(a)H\cap(b)H$，因此 $(b)H\subseteq(a)H$.

4) 容易验证 $\mathcal{R}_H$ 为 S 的右同余，由 2)，$\mathcal{R}_H$ 为 S 上的右格序同余. 设 $\bar{a},\bar{b}\in S/\mathcal{R}_H$，

$$\begin{aligned}\bar{a}\leq\bar{b}\ &\Leftrightarrow\ \overline{a\wedge b}=\bar{a}\Leftrightarrow(a\wedge b)H=(a)H\\&\Leftrightarrow\ (a)H\cup(b)H=(a)H\Leftrightarrow(b)H\subseteq(a)H.\end{aligned}$$

由 2)，$S/\mathcal{R}_H$ 为全序集. □

定理 6.2.2 设 S 为格序半群且有右单位元 e，则 S 存在一个右格序同态 ρ 使得 S/ρ 为非平凡全序集当且仅当 S 有真 $\wedge$ 素 l 理想.

证明 设 S/ρ 为非平凡的全序集，$a,b\in S$ 且 $(a)_\rho\subset(b)_\rho$. 令

$$H=\{x\in S\mid(x)_\rho\subseteq(a)_\rho\},$$

则 $b\notin H$ 且 H 为 $\wedge$ 素的 l 理想. 事实上，设 $x,y\in H$，则 $(x)_\rho\cup(y)_\rho=(x\vee y)_\rho\subseteq(a)_\rho$，即 $x\vee y\in H$. 显然设

$x \in H$, $y \in S$ 且 $y \le x$, 则 $y \in H$. 又设 $x \wedge y \in H$, 则 $(x \wedge y)_\rho = (x)_\rho \cap (y)_\rho \subseteq (a)_\rho$, 因为 S/ρ 为全序集, 故 $(x)_\rho \subseteq (a)_\rho$ 或 $(y)_\rho \subseteq (a)_\rho$. 因此 $x \in H$ 或 $y \in H$.

反之, 设 H 为 S 的真 $\wedge$ 素 l 理想且 $a \in H, b \notin H$, 则 $e \in (a)H$ 但 $e \notin (b)H$, 由引理 6.2.1, $\mathcal{R}_H$ 即满足要求. □

定理 6.2.3 一个带右单位元的格序半群 S 是分配的当且仅当 S 存在 $\wedge$ 素 l 理想集 $\{H_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 使得 $\bigcap\{\mathcal{R}_{H_\lambda} \mid \lambda \in \Lambda\}$ 是单位元 1_S.

证明 充分性 由假设令 $S_\lambda = S/\mathcal{R}_{H_\lambda}, \lambda \in \Lambda$, 则 $S/\mathcal{R}_{H_\lambda}$ 是全序集且格 S 为全序集 $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 的亚直积, 故 S 为分配的.

必要性 设 $a, b \in S$ 且 $a \neq b$, 则由 Iseki 定理 [88], 分配格 S 存在 $\wedge$ 素的 l 理想 H 使得 $a \in H$ 但 $b \notin H$. 因为 S 有右单位元 e, 故 $(a, b) \notin \mathcal{R}_H$. 因此 S 的所有右格序同余 $\{\mathcal{R}_{H_\lambda} \mid \lambda \in \Lambda\}$ 之交为 1_S. □

下面给出本节主要定理 —— 仿 Holland 关于格序群的表示定理.

定理 6.2.4 一个带右单位元 e 的格序半群 S 是分配的当且仅当 S 可格序嵌入 (l 嵌入) 到某个全序集上保序映射组成的格序幺半群中去.

证明 设 T 为全序集, 显然 $S(T)$ 的任意格序子半群是分配的. 反之, 设 S 为分配的, 且带右单位元, 由定理 6.2.3, S 存在右同余簇 $\{\rho_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 使得 S/ρ_λ 为全序集且 $\bigcap \rho_\lambda = 1_S$. 选取 Λ 上一个全序关系, 我们现在定义集 $T = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} (S/\rho_\lambda)$ 上字典序, 即

$$[a]_\lambda \le [b]_\mu \Leftrightarrow \lambda < \mu \text{ 或 } \lambda = \mu, a \le b,$$

则 T 是全序集. 定义 S 到 $S(T)$ 的映射 ψ 如下

$$\psi : a \to \psi_a \mid \psi_a([s]_\lambda) = [as]_\lambda,$$

则 ψ 是可定义的. 事实上, 设 $a=b,[a]_\lambda=[b]_\lambda$, 则 $(\forall s\in S)$ $[as]_\lambda=[bs]_\lambda$, 即 $\psi_a=\psi_b$. 设 $a\neq b$, 存在右格序同态 ρ_λ 使得 $(a,b)\notin\rho_\lambda$, 则

$$\psi_a([e]_\lambda)=[a]_\lambda\neq[b]_\lambda=\psi_b([e]_\lambda),$$

因此 $\psi_a\neq\psi_b$. ψ 保格序运算是显然的. □

注 6.2.5 1) 在以上各定理中, 我们一直使用右同余, 如果在有关结论中将 $\mathcal{R}_H$ 改为 $_H\mathcal{R}$, 将右同余改为左同余, 将右单位元改为左单位元, 则可得到类似的性质.

2) 在格序群 G 中, 一个元素是正 (负) 的, 如果 $a\geq e(\leq e)$, 但格序半群定义一个元素为正 (负) 的就没有那么简单, 有左正 (负) 、右正 (负) 之分. 在格序群中, 任一个元素 a 可表为 a^+a^-, 即一个正元与一个负元之积, 这里 $a^+=a\vee e,a^-=a\wedge e$. 一般格序半群即使带有单位元也不具有该性质, 但是可以直接计算得 $\forall\alpha\in S(T)$, $\alpha=(\alpha\vee e)(\alpha\wedge e)$, 这里 e 为 T 上的单位映射. 由定理 6.2.4, 分配的格序幺半群具有该性质.

问题 6.2.6 定理 6.2.4 中去掉右单位元, 结论成立吗?

§3 正格序半群的阿基米德等价

阿基米德等价是研究序半群结构的重要工具, 1960 年至 1970 年这十多年时间里, T. Saito 对全序半群的阿基米德等价做了大量工作, 本节所考虑的是 1985 年以后, 人们在格序半群上对阿基米德等价的研究, 并通过它们给出正格序半群的分解定理 [89,90], 以下设 S 为正格序半群.

设 $a,b\in S$, a 和 b 称为阿基米德等价的, 如果存在 $m,n\in Z^+$ 使得 $a\leq b^m,b\leq a^n$. 因为 S 为正序的, 所以 m,n 可以统一起来, 设 $m\leq n$, 这时 m 就可用 n 替代, 即 $a\leq b^m\leq b^n,b\leq a^n$,

称 $aAb(n)$. S 称为 a 单的，如果 S 中的任意两个元素均阿基米德等价.

引理 6.3.1 设 A 为 S 上的阿基米德等价，则下列各款成立：

1) A 为 S 上的格序同余；
2) A 的某个同余类 $(a)_A$ 为格序子半群；
3) $(\forall a, b \in S)\ abAbaA(a \vee b)$.

证明仅为验证，略去.

由该引理很容易得出

定理 6.3.2 设 S 为正格序半群，则 S/A 是半格，即 S 为 a 单 l 半群的半格.

由上定理，我们下面主要研究 a 单的格序半群.

定理 6.3.3 设 S 为 a 单格序半群，则要么包含惟一幂等元且是幂零半群，要么 S 为扭自由的.

证明 设 S 包含幂等元 e, $\forall a \in S$, 则存在 $n \in \mathbf{Z}^+$ 使得 $aAe(n)$, 又 $e^2 = e$, 故 e 为 S 的最大元，当然是惟一的. 因为 $\forall a \in S, ea, ae \geq e$, 所以 e 也为 S 的零元. 由 $aAe(n)$, 可得 $a^n = e$.

如果 S 没有幂等元，显然 $\forall a \in S$,

$$a < a^2 < a^3 < \cdots,$$

因此 S 为扭自由的. □

下面我们考虑 a 单幂零格序半群 S 的结构. 设 S 为 a 单幂零的， $a \in S$, $L(a) = \{b \mid ba = 0\}$ 称为 a 的左零化子，则容易验证 $L(a)$ 为 S 的子格且 $L(a \wedge b) = L(a) \cap L(b)$. 由定理 6.3.3 得 0 为 S 的最大元，所以 $L(a)$ 为幻 (格对偶理想).

定义 6.3.4 一个 a 单幂零格序半群 S 称为步 (step) 如

果 S 中的元是有限并不可约的，即如果 $a \vee b = 0$, 则 $a = 0$ 或 $b = 0$.

在步 S 中，不难验证 $L(a \vee b) = L(a) \cup L(b)$ 也成立. 下面我们归纳定义步 S 上的一组等价关系 A_n

$$(a, b) \in A_n \Leftrightarrow (a, b) \in A_{n-1} \text{且} L(a^n) = L(b^n),$$

特别地，当 $n = 1$ 时，$(a, b) \in A_1 \Leftrightarrow L(a) = L(b)$. 不难验证 A_1 为 S 上的格序左半群同余. 设 $S_n = S/A_n$, 则 S_1 为全序集. 事实上，设 $[a]_1, [b]_1 \in S_1$,

$$\begin{aligned} [a]_1 \leq [b]_1 \quad &\Leftrightarrow \quad [a]_1 \cup [b]_1 = [b]_1 \Leftrightarrow L(a \vee b) = L(b) \\ &\Leftrightarrow \quad L(a) \cup (b) = L(b) \Leftrightarrow L(a) \subseteq L(b). \end{aligned}$$

仿照引理 6.2.1 的证明，设 $x \in L(a) \backslash L(b)$, $\forall y \in L(b)$, 则

$$x \vee y \in L(a) \cap L(b) = L(a \wedge b),$$

因为 S 是有限并不可约的，必有 $x \in L(a \wedge b)$ 或 $y \in L(a \wedge b)$, 即 $x \in L(a) \cap L(b)$ 或 $y \in L(a) \cap L(b)$, 显然只有 $y \in L(a) \cap L(b)$, 因此 $L(b) \subseteq L(a)$. 因此证得 $\{L(a) \mid a \in S\}$ 关于集包含关系构成链，故不难理解 S_1 成链的事实. 如果 $n > 1$, 以上事实就不一定成立，但我们有

定理 6.3.5 A_n 是 A_{n-1} 的任一同余类 $[a]_{n-1}$ 上的格序同余且 $[a]_{n-1}/A_n$ 是全序集.

证明 设 $a, b, c \in [a]_1$, $(a, b) \in A_2$, 则 $L(a) = L(b) = L(c)$, 且 $L(a^2) = L(b^2)$. 下面证明 $L((a \vee c)^2) = L((b \vee c)^2)$. 事实上

$$L((a \vee c)^2) = L(a^2 \vee ac \vee ca \vee c^2) = L(a^2) \cup L(ac) \cup L(ca) \cup L(c^2),$$

因为 $L(a) = L(c)$ 且 A_1 为左半群同余，故 $L(ca) = L(c^2)$, $L(ac) = L(a^2)$, 因此

$$L((a \vee c)^2) = L(a^2 \vee c^2).$$

同理可证 $L((b\vee c)^2)=L(b^2\vee c^2)$. 因为 $L(a^2\vee c^2)=L(b^2\vee c^2)$, 所以 $(a\vee c,b\vee c)\in A_2$. 对偶地可证 $(a\wedge c,b\wedge c)\in A_2$. 设 $[a]_2,[b]_2\in[a]_1/A_2$, 因为 $a,b\in[a]_1$, 所以 $L(a)=L(b)$. 因为 $L(a^2)\subseteq L(b^2)$ 或 $L(b^2)\subseteq L(a^2)$, 不妨设 $L(a^2)\subseteq L(b^2)$, 则 $L((a\wedge b)^2)=L(a^2\wedge b^2)=L(a^2)$, 又 $L(a\wedge b)=L(a)$, 由 A_2 的定义得 $[a\wedge b]_2=[a]_2$, 即 $[a]_2\leq[b]_2$.

利用上述证明过程, 我们利用数学归纳法就可证得本定理的结论, 略之. □

记 $S(n)=\{a\in S\mid a^n=0\}$, 则 $S(n-1)\subseteq S(n),n=1,2,\cdots$, 且每个 $S(n)$ 为子 $\vee$ 半群, $S=\bigcup_{n-1}^{\infty}S(n)$. 令 $\{a\}_n=[a]_n\cap S(n)$, 则

定理 6.3.6 $S(2)$ 是带零格序半群链.

证明 设 $a,b\in\{a\}_2=[a]_2\cap S(2)$, 则 $(a,b)\in A_1$, 即 $L(a)=L(b)$. 因为 $a\in L(a)$, 所以 $ab=ba=0$, 因此 $\{a\}_2\cup\{0\}$ 为零半群. 因为 $[a]_2$ 为格且 $S(2)$ 为 $\vee$ 半群, 所以 $\{a\}_2\cup\{0\}$ 是 $\vee$ 半格. 又

$$(a\wedge b)^2=a^2\wedge ab\wedge ba\wedge b^2=0,$$

所以 $a\wedge b\in\{a\}_2\cup\{0\}$.

$S(2)=S\cap S(2)=\bigcup_{a\in S}([a]_2\cap S(2))$, 因为 S/A_2 是全序集, 所以 $S(2)$ 是互不相交的零格序子半群的链, 且如果 $\{a\}_2\leq\{b\}_2$, 则 $[a]_1\leq[b]_1$, 从而 $a\in L(a)\subseteq L(b)$, 即 $ab=0$. □

一般地, 我们有

定理 6.3.7 $S(n)$ 是每个均包含 $S(n-1)$ 的 $\vee$ 格序半群的链.

证明 设 $a\in S(n)$, 我们证明 $\{a\}_n\cup S(n-1)$ 是 $\vee$ 格

序半群. $\forall b,c\in S(n-1)\cup\{a\}_n$, 如果 $b,c\in S(n-1)$, 则 $bc\in S(n-1)$; 如果 $b,c\in\{a\}_n=[a]_n\cap S(n)$, 则 $bA_{n-1}c$, 从而 $L(b^{n-1})=L(c^{n-1})$. 因为 $b\in L(b^{n-1})=L(c^{n-1})$, 所以 $bc^{n-1}=0$, $(bc)^{n-1}\geq bc^{n-1}=0$, 即 $(bc)^{n-1}=0$. 这就证明了 $bc\in S(n-1)$. 如果 $b\in\{a\}_n, c\in S(n-1)$, 则 $(bc)^{n-1}\geq bc^{n-1}=0$, 即 $bc\in S(n-1)$. 因为 $S(n-1)$ 和 $\{a\}_n$ 均为上半格, 设 $b\in\{a\}_n, c\in S(n-1)$, 则 $(b\vee c)^{n-1}\geq(b\vee c)c^{n-2}=0$, 故 $b\vee c\in S(n-1)$.

又 $S(n)=S\cap S(n)=\bigcup\limits_{a\in S}([a]_n\cap S(n))$, 所以 $S(n)$ 是 A_n 类的子集的无交并, 且 $\{\{a\}_n\cup S(n-1)\mid n\in\mathbf{Z}^+\}$ 关于字典序构成链. □

注 6.3.8 设 $a,b\in S(n)-S(n-1)$ 且 $\{a\}_n\leq\{b\}_n$, 显然 $ab\in S(n-1)$. 否则, 设 A_i 是第一个使得 $\{a\}_i<\{b\}_i$ 的上述等价关系, 则 $a^{n-i}\in L(b^i)$, 因此 $0=a^{n-i}b^i\leq(ab)^{n-1}$, 故 $ab\in S(n-1)$. 总结上述讨论, 我们看出下述轮廓:

每个步 S 是 $\{S(n)\mid n\in\mathbf{Z}^+\}$ 的升链, 而 $S(n)-S(n-1)$ 又是一些类的全序集且其中任意两个元素之积在 $S(n-1)$ 中.

□

在上一节中我们知道, 任一分配的格序幺半群可以 l 嵌入到 $S(T)$ 中去, T 为全序集. 如果 S 为正格序半群, S 没有单位元 e , 我们可以并入一个单位元 e 到 S 中去 (e 一定是最小元), 这样每个分配的正格序半群 S 可以 l 嵌入到 $S(T)$ 中去 (而且是 $S(T)$ 的正锥 $S(T)^+$ 中).

在 $S(T)^+$ 中我们考虑一个幂等元 0, 映射 $(s,t]$ 中每个元为 t, $T\backslash(s,t]$ 中的元映射为 $T\backslash(s,t]$ 一个固定元. 0 在 $S(T)^+$ 中的阿基米德等价类设为 S, 则 S 为步. 设 $a\in S$,

$$M(a)=\{x\in(s,t]\mid xa=t\}.$$

因为 $a^n = 0$, 所以 $M(a)$ 包含多于 t 一个元素，事实上为 (s,t) 内的一个区间段. $a=0$ 时， $M(a)=(s,t)$, 且我们可以验证在 S 上

$$(a,b) \in A_1 \Leftrightarrow M(a)=M(b),$$

归纳地， $(a,b)\in A_n \Leftrightarrow M(a)=M(b),\cdots,M(a^n)=M(b^n)$.

定理 6.3.9 每个分配的 a 单幂零格序半群是步的亚直积.

证明 设 S 为满足条件的格序半群且有惟一幂等元. 由上说明， S 可以看作为 $S(T)$ 的子 l 半群，这里 T 为全序集. 我们不妨设 T 中包含最小元 (如果没有，则并入一个最小元且规定 S 中的每个元把该最小元映射为其本身) . T 上使得 0 的值为常量的极大区间总有 $(s,t]$ 这种形式. 定义映射

$$\varphi : S \to S((s,t]) \mid f \to f|_{(s,t]},$$

这里 $f\in S\subseteq S(T)$. $\forall a\in S, a\le 0$ 且存在 $n\in \mathbf{Z}^+$ 使得 $a^n=0$. 因此 $(s,t]a\subseteq (s,t]$. 所以 φ 是可定义的. 不难看出 φ 为 l 同态且 $\varphi(S)$ 是步.

对 T 上使得 0 的值为常量的所有非孤点的极大区间，我们均按上面的方法来定义一个 l 同态 $\psi : S\to\psi(S)$, $\psi(S)$ 为步. 如果 $a,b\in S$ 且 $a\ne b$, 则至少存在一个 φ 使得 $\varphi(a)\ne\varphi(b)$. 由此证明 S 为所有形如 $\varphi(S)$ 的步的亚直积. □

在上述定理中，如果把分配去掉，对不对呢？以下我们讨论这个问题.

设 $\mathcal{C}$ 表示 a 单幂零 l 半群但不是步的亚直积的格序半群类. 下面可证 $\mathcal{C}\ne\emptyset$.

定理 6.3.10 设基数 $\alpha\ge 5$, 存在一个格序半群 S, $(S,\vee,\wedge)$ 为模格且 $S\in\mathcal{C}, |S|=\alpha$.

证明 设 β 为基数且 $\beta+2=\alpha$, $S=\{u,v,a_i\}_{i\in I}$, 且

Card$I = \beta$. 定义 S 上的序关系 $\leq$ 如下:

$$u < a_i < v, i \in I; a_i || a_j, i \neq j.$$

则 $(S, \vee, \wedge)$ 是模格. 如果定义 S 上的二元运算为 $(\forall x, y \in S)\ xy := v$, 则 S 是格序半群且 Card$S = \alpha$.

S 不是步, 因为 v 是有限并可约的. 如果 S 可表为步 $S_k(k \in K)$ 的亚直积, $\forall k \in K$, 则存在 S 的 l 同余 R_k 使得 $S_k \cong S/R_k$. 因为 S 不是步, 所以 $R_k \neq \iota, \forall k \in K$. 不失一般性, 我们也可设 $R_k \neq 1_S, \forall k \in K$. 因为格 $(S, \vee, \wedge)$ 中每个有界链均有限且任意两个素区间是可投的 (projective), 所以 Con$((S, \vee, \wedge)) = \{\iota, 1_S\}$. 矛盾. □

定理 6.3.11 对每个无限基数 α, 存在一个格序半群系 $\{S_i\}_{i \in I}$ 使得

1) Card$I = \alpha$;
2) 设 $i, j \in I$, 则 $(S_i, \vee_i, \wedge_i) = (S_j, \vee_j, \wedge_j)$;
3) S_i 和 S_j 不 l 同构 $(i \neq j)$;
4) 任意 S_i 在 $\mathcal{C}$ 中.

证明 设 $\alpha_i (i \in I)$ 是不相同的基数, $\forall i \in I$, $J(i)$ 为指标集, 且 Card$J(i) = \alpha_i$. 令

$$S = \{u, u_1, v, a_i, b_{ij}\} \quad (i \in I, (i, j) \in I \times J(i)).$$

定义 S 上的序关系 $\leq$ 如下:

$$u < u_1 < a_i < b_{ij} < v,$$

S 中其他元素之间均不可比较, 则 $(S, \leq)$ 为格. $\forall i \in I$, 在 S 上定义二元运算 "$\circ_i$": 如果 $x = y = u$, 则 $x \circ_i y = a_i$, 否则 $x \circ_i y = v$. 记 $S_i = (S, \vee, \wedge, \circ_i)$, 不难验证 $S_i, \forall i \in I$ 均为 a 单的幂零格序半群且满足条件 2). 如果 $i \neq j$, S_i 与 S_j 之间存在 l

同构 φ, 则 φ 是格 $(S,\vee,\wedge)$ 的自同构, 因此 u,u_1,a_i 和 b_{ij} 在 φ 下不变 (这里要注意到 α_i 与 α_j 互不相同). 因此

$$a_i=\varphi(a_i)=\varphi(u\circ_i u)=\varphi(u)\circ_j\varphi(u)=u\circ_j u=a_j,$$

矛盾.

下面我们用反证法证明 4). 设存在 $i\in I$ 使得 S_i 可表为步 $T_m(m\in M)$ 的亚直积. 因为 S_i 不是步, 所以 $\forall m\in M$ 存在 S_i 的一组非平凡的格序同余 $R_m(m\in M)$ 使得 $\bigcap_{m\in M} R_m=\iota$.

设 $m\in M$ 固定, $j(1)$ 和 $j(2)$ 为 I 中两个不相同的元素, 则

$$a_{j(1)}(R_m)\vee a_{j(2)}(R_m)=v(R_m).$$

因为 S/R_m 为步, 则 $a_{j(1)}(R_m)=v(R_m)$ 或 $a_{j(2)}(R_m)=v(R_m)$. 不妨设 $a_{j(1)}(R_m)=v(R_m)$. 取 $j(3)\in I$ 且和 $j(1),j(2)$ 都不相同. 则

$$u_1=a_{j(1)}\wedge a_{j(2)}R_m v\wedge a_{j(2)}=a_{j(2)},$$

$$u_1=a_{j(1)}\wedge a_{j(3)}R_m v\wedge a_{j(3)}=a_{j(3)}.$$

故

$$u_1=u_1\vee u_1 R_m a_{j(2)}\vee a_{j(3)}=v,$$

因为 $m\in M$ 可以任意选取, 所以 $(u_1,v)\in\bigcap_{m\in M} R_m=\iota$, 矛盾. □

§4 弱半格序半群的表示

本节所考虑的半群 S 均为可换的. 如果半格序半群 S 只要求为上半格, 这时 S 称为弱半格序半群. 本节讨论这类格序半群的亚直积分解问题, 主要结果来自 [91].

一个弱半格序半群 ($w\bigvee$ 半群) S 称为整的 (integral), 如果 S 中包含单位 1 且为最大元. F 称为 S 的滤子如果 F 为 S 的子半群且 $a\in F, a\leq b$, 则 $b\in F$ (注意这里定义对整 $w\bigvee$ 半群而言和一般序半群中滤子的定义一致). 整 $w\bigvee$ 半群 S 的所有滤子关于集合的包含关系构成完备格, 其最小元为 $\{1\}$. 设 F_1, F_2 为 S 的两个滤子, 则显然 $F_1\cap F_2$ 也为 S 的滤子,

$$F_1\cap F_2=\{f_1\vee f_2 \mid f_1\in F_1, f_2\in F_2\}.$$

S 的一个元素 a 生成的滤子 $[a):=\{s\in S \mid s\geq a^k, k\in \mathbf{Z}^+\}$. 我们回忆一下, 一个带最小元 0 的格 L 称为伪补的 (pseudocomplemented) 如果 L 的每个元 a 有伪补 a^* 存在. L 称为析取的 (disjunctive) 如果对 L 的不相等两元 a, b, 存在 c 使得 $a\wedge c=0$ 但 $b\wedge c\neq 0$ 或 $b\wedge c=0, a\wedge c\neq 0$. 设 L 是伪补的, S 的闭元素集

$$C(L)=\{a\in L \mid a=a^{**}\},$$

则 $C(L)$ 是 Boole 代数, 最小元为 0, 设 $a\in C(L)$, 则 a^* 为 a 在 $C(L)$ 中的补. 设 $a, b\in C(L)$, 则在 $C(L)$ 中 $a\vee_1 b=(a^*\wedge b^*)^*$. 整 $w\bigvee$ 半群的滤子格是伪补的, 设 F 为滤子, 则 F 的伪补 $F^\perp=\{a\in S \mid a\vee f=1, \forall f\in F\}$, $[a)$ 的伪补 $[a)^\perp$ 简记为 $a^\perp$.

引理 6.4.1 设 S 为整 $w\bigvee$ 半群, $B(S)=\{a^\perp \mid a\in S\}$ 是 S 的所有闭滤子 Boole 代数的分配对偶析取子格且如果 S 为格序半群,

$$a^\perp\cap b^\perp=(ab)^\perp, a^\perp\cap b^\perp=(a\wedge b)^\perp, a^\perp\vee_1 b^\perp=(a\vee b)^\perp.$$

证明 1) $a^{\perp\perp}\cap b^{\perp\perp}=(a\vee b)^{\perp\perp}$. 事实上, 因为 $a\in a^{\perp\perp}, b\in b^{\perp\perp}$, 所以 $a\vee b\in a^{\perp\perp}\cap b^{\perp\perp}$, $(a\vee b)^{\perp\perp}\subseteq a^{\perp\perp}\cap b^{\perp\perp}$. 设 $z\in a^{\perp\perp}\cap b^{\perp\perp}\cap(a\vee b)^\perp$, 则 $z\in(a\vee b)^\perp$, 即 $z\vee a\vee b=1$, $z\vee a\in b^\perp$. 又 $z\vee a\in b^{\perp\perp}$, 从而 $z\vee a\in b^\perp\cap b^{\perp\perp}=[1)$. 类

似地可导出 $z \in a^{\perp}$, 又 $z \in a^{\perp\perp}$, 所以 $z=1$, 我们以上证明了 $a^{\perp\perp} \cap b^{\perp\perp} \cap (a \vee b)^{\perp} = \{1\}$, 因此

$$a^{\perp\perp} \cap b^{\perp\perp} \subseteq (a \vee b)^{\perp\perp},$$

从而 $a^{\perp} \vee_1 b^{\perp} = (a^{\perp\perp} \cap b^{\perp\perp})^{\perp} = (a \vee b)^{\perp}$.

2) 因为 $ab \leq a, b$, 所以 $(ab)^{\perp} \subseteq a^{\perp} \cap b^{\perp}$. 设 $c \in a^{\perp} \cap b^{\perp}$, 则

$$(c \vee a)(c \vee b) = c^2 \vee ca \vee cb \vee ab = 1 \leq c \vee ab,$$

因此 $c \vee ab = 1, c \in (ab)^{\perp}$. 这就证得 $(ab)^{\perp} = a^{\perp} \cap b^{\perp}$. 如果 S 为 l 半群, 类似可得 $(a \wedge b)^{\perp} = a^{\perp} \cap b^{\perp}$. 因为 $C(S)$ 是分配的, 故 $B(S)$ 是分配子格且最大元为 $S = 1^{\perp}$.

3) $B(S)$ 是对偶析取的. 设 $a^{\perp} \neq b^{\perp}$, 不妨设 $a^{\perp} \not\subseteq b^{\perp}$ 存在 $c \in S$ 使得 $a \vee c = 1$ 但 $b \vee c \neq 1$. 因此

$$a^{\perp} \vee_1 c^{\perp} = (a \vee c)^{\perp} = S, b^{\perp} \vee_1 c^{\perp} = (b \vee c)^{\perp} \neq 1^{\perp} = S.$$

□

命题 6.4.2 设 S 为整 $w\bigvee$ 半群 (l 半群), 映射

$$\varphi : S \to B(S) \mid \varphi(a) = a^{\perp}, \forall a \in S$$

是 S 到 $B(S)$ 的满同态映射且 $\mathrm{Ker}\varphi = \{a \in S \mid \varphi(a) = 1^{\perp}\} = [1)$. 进一步地, 设 D 为对偶析取分配格且 $\psi : S \to D$ 是满同态,

$$\mathrm{Ker}\psi = \{a \in S \mid \psi(a) = 1\} = [1),$$

则存在一个同构映射 $\psi_1 : B(S) \to D$ 使得 $\psi = \psi_1 \circ \varphi$.

证明 由引理 6.4.1, φ 是满同态且 $\mathrm{Ker}\varphi = [1)$. 定义

$$\psi_1 : B(S) \to D \mid \psi_1(a^{\perp}) = \psi(a).$$

如果 $a^\perp = b^\perp$, $\psi(a) \neq \psi(b)$, 因为 D 是对偶析取的，存在 $d \in D$ 使得 $d \vee \psi(a) = 1$ 但 $d \vee \psi(b) \neq 1$. 又存在 $t \in S$ 使得 $\psi(t) = d$, 从而

$$\psi(t \vee a) = 1, \psi(y \vee b) \neq 1,$$

必有 $t \vee a = 1$, $t \vee b \neq 1$, 和 $a^\perp = b^\perp$ 矛盾. 这说明 ψ_1 是可定义的. 如果 $a^\perp \neq b^\perp$, 存在 $c \in S$ 使得 $a \vee c = 1$ 但 $b \vee c \neq 1$, 则

$$\psi(a) \vee \psi(c) = 1, \psi(b) \vee \psi(c) \neq 1.$$

故 $\psi(a) \neq \psi(b)$. ψ_1 显然是满的，因为 $\psi_1(\varphi(a)) = \psi_1(a^\perp) = \psi(a)$. □

S 的滤子 F $(\neq S)$ 称为素的，如果 $a \vee b \in F$, 则 $a \in F$ 或 $b \in F$, 不难看出 F 为素当且仅当 $S \backslash F$ 为 sl 理想.

引理 6.4.3 在整 $w\bigvee$ 半群 S 中，每个极大 sl 理想是素的且 S 的素滤子是极小的当且仅当 $S \backslash F$ 是极大 sl 理想.

证明 设 M 为极大 sl 理想，设 $x \notin M, y \notin M$, 作集合

$$M_1 = \{s \in S \mid (\exists m \in M)\ s \leq m \vee x\},$$

则 M_1 是真包含 M 的 S 的 sl 理想, 只有 $M_1 = S$. 存在 $m_1 \in M$ 使得 $m_1 \vee x = 1$; 同理可证存在 $m_2 \in M$ 使得 $m_2 \vee y = 1$. 因为 $1 \notin M$, 故

$$1 = (m_1 \vee x)(m_2 \vee y) = m_1 m_2 \vee m_1 y \vee x m_1 \vee xy$$

中 $xy \notin M$. 本引理中其他部分容易得出，略之. □

定理 6.4.4 S 中素滤子 F 是极小的当且仅当 $\forall a \in F, a^\perp \not\subseteq F$.

证明 设 F 为整 $w\bigvee$ 半群的素滤子且 $a^\perp \not\subseteq F, \forall a \in F$. 如果 S 中存在另一素滤子 F_1 使得 $F_1 \subset F$, 取 $b \in F \backslash F_1$, 存在 $b_1 \in b^\perp \backslash F$, 因为 $b \vee b_1 = 1$, 必有 $b \in F$ 或 $b_1 \in F$, 矛盾.

反之，设 F 为极小素滤子，由引理 6.4.3, $S\backslash F$ 为极大 sl 理想. 设 $a\in F$, 作集合

$$M_1=\{s\in S\mid(\exists m\in S\backslash F)\ s\le m\vee a\},$$

它是 S 的包含 $S\backslash F$ 的 sl 理想，故 $M_1=S$, 即存在 $m\in S\backslash F$ 使得 $m\vee a=1$, $m\in(S\backslash F)\cap a^{\perp}$, 即 $a^{\perp}\not\subseteq F$. □

现在我们来考虑和 sl 理想、滤子均有关的概念和同余. 设 θ 为整 $w\bigvee$ 半群的同余， $\mathrm{Ker}\theta=\{s\in S\mid(s,1)\in\theta\}$, 则 $\mathrm{Ker}\theta$ 为 S 的滤子，反之， S 的任一滤子 F 均为 S 的某一同余的核. 事实上，定义 $\theta(F)$ 为

$$(a,b)\in\theta(F)\Leftrightarrow(\exists f\in F)\ fa\le b, fb\le a,$$

则 $\theta(F)$ 的核 $\mathrm{Ker}(\theta(F))=F$.

定理 6.4.5 设整 $w\bigvee$ 半群 S 为相对补的分配格当且仅当 S 的每个滤子是惟一同余的核.

证明 如果 S 的每个滤子 F 是惟一同余的核，则在命题 6.4.2 中， $\varphi:S\to B(S)$ 的核 $\mathrm{Ker}\varphi=\{(a,b)\mid\varphi(a)=\varphi(b)\}$ 必为相等关系，即 φ 为同构映射，所以 S 是分配的. 证明的其他部分参看有关格论的书籍（例如， G.Szasz, Introduction to lattice theory, Academic Press, New York, 1963 ）. □

一个整 $w\bigvee$ 半群 S 称为简化的 (reduced), 如果 $a,b\in S$, $a<1,b<1$, 则 $a\vee b<1$.

定理 6.4.6 设 S 是整 $w\bigvee$ 半群 (l 半群), 则 S 是简化 $w\bigvee$ 半群 (l 半群) 簇 $\{S/\theta(F)\}$ 的亚直积，这里 F 属于 S 上的所有极小素滤子集.

证明 设 F 为极小素滤子， $\theta(F)$ 是以 F 为核的同余，则 $S/\theta(F)$ 是简化的. 事实上，设

$$a(\theta(F))<1(\theta(F)),\quad b(\theta(F))<1(\theta(F)),$$

则 $(a \vee b)(\theta(F)) < 1(\theta(F))$, 否则 $a \vee b \in F, a \in F$ 或 $b \in F$, 即 $a(\theta(F)) = 1$ 或 $b(\theta(F)) = 1$, 矛盾.

要证明本定理的结论，只要证明如果 $x, y \in S, x \not\leq y$, 一定存在极小素滤子 F 使得 $x \neq y(\theta(F))$. 记 $J = \{s \in S \mid sx \leq y\}$, 则 J 为 S 的 sl 理想，因为 $1 \notin J$, 所以 $J \neq S$. 由 Zorn 引理，存在 S 的极大 sl 理想 M 包含 J, $F = S \backslash M$ 为极小素滤子且 $x \neq y(\theta(F))$, 否则存在 $f \in F$ 使得 $fx \leq y$, 从而

$$f \in F \cap J \subseteq F \cap M = \emptyset,$$

矛盾. □

以下设 0 为 S 的最小元. $\forall a \in S$, $a^* = 0 : a$ 如果存在, a^* 称为 a 在 S 中的拟剩余. 如果 S 的每个元均有拟剩余，S 就称为是拟剩余的.

定理 6.4.7 设 S 是具有 0 元的整 $w\bigvee$ 半群，则下列各款等价:

1) $(\forall a \in S)$ $(\exists b \in S)$ $ab = 0, a \vee b = 1$;

2) S 是拟剩余的且 $a \vee a^* = 1, \forall a \in S$;

3) S 为 Boole 代数.

证明 3) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 1) 显然.

1) $\Rightarrow$ 3) 如果 S 可简化，由 1), $S = \{0, 1\}$, 根据定理 6.4.6, S 为一些 $\{0, 1\}$ 这类 $w\bigvee$ 半群的亚直积，当然 S 为 Boole 代数. □

定理 6.4.8 设 S 为整的拟剩余的 $w\bigvee$ 半群，则下列各款等价:

1) $\forall a \in S, a^* \vee a^{**} = 1$;

2) S 是整简化的稠密的 ($ab = 0 \Rightarrow a = 0$, 或 $b = 0$) $w\bigvee$ 半群的拟剩余亚直积.

证明 如果 S 是简化的，由 $a^* \vee a^{**} = 1$ 得 $a^* = 1$ 或

$a^{**}=1$, 即 $a=0$ 或 $b=0$, 故 S 为稠密的, 根据定理 6.4.6, 结论成立. 2)$\Rightarrow$ 1) 显然. □

定理 6.4.9 设 S 为整剩余的 $w\bigvee$ 半群, 则下列各款等价:

1) $(\forall a,b\in S)\ (a:b)\vee(b:a)=1$;

2) S 为全序整可剩余的半群的可剩余的亚直积;

3) S 是下半格且 $(\forall a,b\in S)\ a:(b\wedge c)=(a:b)\vee(a:c)$;

4) S 是下半格且 $(\forall a,b\in S)\ (b\vee c):a=(b:a)\vee(c:a)$.

证明 1) $\Rightarrow$ 2) 由定理 6.4.6 我们证得 S 为简化的, 又从 $(a:b)\vee(b:a)=1$ 得 $a:b=1$ 或 $b:a=1$, 从而 $b\le a$ 或 $a\le b$, 故 S 为全序的. 2)$\Rightarrow$ 1) 显然. 我们从 2) 中可以看出 S 为下半格, 2)$\Rightarrow$ 3) , 2) $\Rightarrow$ 4), 3)$\Rightarrow$ 1), 4)$\Rightarrow$ 1) 仅是验证, 略去. □

第七章　序半群与理论计算机科学

§1 W 半群与 W 网

定义 7.1.1　一个半格序半群 $(W,\cdot,\leq)$ 称为 W 半群，如果 W 满足：

1) 格 $(W,\leq)$ 是完备；
2) W 包含单位元 e 和零元 0；
3) W 的乘法运算对并运算满足无限分配律，即

$$(\forall a, b_\alpha \in W)\ \ a(\vee b_\alpha) = \vee(ab_\alpha), (\vee b_\alpha)a = \vee(b_\alpha a).$$

例如给定集合 X 上的二元关系 $R(X)$ 关于集合的包含关系和关系的合成运算构成 W 群. 又设 $Q = [0,+\infty) \cup \{+\infty\}$, 则 $(Q,+,\leq)$ 是 W 半群且单位元为 0, 零元为 $+\infty$.

在 W 半群 W 中，设 $a \in W$, 记 $a^0 = e$, $\bar{a} = \bigvee\limits_{i>0} a^i, a^* = \bar{a} \vee e$.

引理 7.1.2　在 W 半群中，下列各款成立：

1) 如果 $a \geq b$, 则 $\bar{a} \geq \bar{b}, a^* \geq b^*$;
2) $(\bar{a})^{i+1} = \bar{a}\cdot a^i = a^i\bar{a}, i \geq 0$;
3) $(a^*)^i = a^*, i \geq 0$;
4) $\bar{\bar{a}} = \bar{a}, a^{**} = a^*$.

证明略.

设 S 为 W 半群的非空子集，$\overline{S}$ 和 S^* 分别表示包含 S 和零元且满足下列闭包条件的子集：

$\overline{S}$: 如果 $a,b\in\overline{S}$，则 $ab,a\vee b,\bar{a}\in\overline{S}$；

S^*: 如果 $a,b\in S^*$, 则 $ab,a\vee b,a^*\in S^*$.

引理 7.1.3 设 S 为 W 半群 W 的子集，设 $\sum=\bigvee_{s\in S}s$，则下列各款成立：

1) 如果 $a\in\overline{S}$, 则 $a\leq\overline{\sum}$；

2) 如果 $a\in S^*$ ，则 $a\leq\sum^*$；

3) 如果 $a\in\overline{S}$ 且 $a\geq\sum$, 则 $a=\overline{\sum}$；

4) 如果 $a\in S^*$ 且 $a\geq\sum^*$, 则 $a=\sum^*$.

证明 令 $T=\{a\mid a\leq\overline{\sum}\}$, 则 $T\supseteq S$. 设 $a,b\in T$, 则 $ab,a\vee,\bar{a}\in T$, 所以 $\overline{T}=T\supseteq\overline{S}$. 因此，如果 $a\in\overline{S}$, 则 $a\in T$.

2), 3) 和 4) 可以类似证明. □

引理 7.1.4 设 S 为 W 半群的子集且 S 中每个元为正元 $(\forall a\in S,a\geq e)$, 即 S 为正的，则 $\overline{S}$ 也为正的且 $\overline{S}=S^*$.

证明由定义可直接推导，留作练习.

设 S 为 W 半群的有限子集，我们现在可给出 S 术语 (S-term) (记为 f) 、它的生成集 (记为 G_f) 、它的深度 (记为 d_f) 的归纳定义.

i) $\forall s\in S$ 是 S 术语，生成元集为 $\{s\}$, 深度为 0；

ii) 如果 f,g 为 S 术语，则 $f\vee g,fg$ 及 $\bar{f}$ 也为 S 术语且

$$G_{fg}=G_{f\vee g}=G_f\cup G_g,G_{\bar{f}}=G_f,$$
$$d_{fg}=d_{f\vee g}=\max(d_f,d_g)+1,d_{\bar{f}}=d_f+1.$$

iii) S 术语均由以上形式构作.

定理 7.1.5 设 S 是 W 半群的有限正元集，f 是 S 术语且生成集为 G_f. 则

$$\bar{f}=\overline{\sum_f},$$

这里 $\sum_f = \bigvee\{a \mid a \in G_f\}$.

证明 对 S 术语的深度作归纳. 如果 $d_f = 0$, 结论显然成立. 设 f 为 S 术语, $d_f > 0$ 且 S 术语的深度 $< d_f$ 该定理成立.

情形 1 $f = g \vee h$, 则 $d_g < d_f, d_h < d_f$, 由引理 7.1.3 及归纳假设

$$\bar{f} = \overline{g \vee h} = \bar{g} \vee \bar{h} = \overline{\overline{\sum_g}} \vee \overline{\overline{\sum_h}} = \overline{\sum_g} \vee \overline{\sum_h} = \overline{\sum_f}.$$

情形 2 $f = gh$, 则 $gh \geq g, h$, 即 $gh \geq g \vee h$, 由引理 7.1.3 (2), $\bar{f} = \overline{gh} = \overline{g \vee h}$, 归为情形 1 .

情形 3 $f = \bar{g}, d_g < d_f$. 由归纳假设

$$\bar{f} = \bar{\bar{g}} = \bar{g} = \overline{\overline{\sum_g}} = \overline{\sum_f}. \qquad \square$$

进一步地, 我们有

推论 7.1.6 设 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 为 W 半群的元素, $S = \{a_1^*, a_2^*, \cdots, a_n^*\}$. 设 f 为 S 术语, 生成集 $G_f = \{g_1^*, g_2^*, \cdots, g_m^*\} \subseteq S$, 则 $f^* = (g_1 \vee \cdots \vee g_m)^*$.

证明 由引理 7.1.3, 7.1.4 和定理 7.1.5 ,

$$f^* = \bar{f} = \overline{g_1^* \vee \cdots \vee g_m^*} = (g_1^* \vee \cdots \vee g_m^*)^* = (g_1 \vee g_2 \vee \cdots \vee g_m)^*.$$

$\square$

设 $(W, \cdot, \leq)$ 为 W 半群, W_n 为 W 上的 $n \times n$ 矩阵 (a_{ij}) 集. 在 W_n 中定义二元关系和乘法如下:

设 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$,

$$A \leq B \Leftrightarrow a_{ij} \leq b_{ij}, \forall i, j \in \{1, 2, \cdots, n\},$$

$$AB = (\bigvee_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}),$$

则 $(W_n, \cdot, \leq)$ 为 W 半群， O 矩阵为 W_n 的零元，单位矩阵 E 为 W_n 的单位元.

设 $A \in W_n$, 记 $S(A)$ 为 A 的元素集，则我们有

定理 7.1.7 $S(\overline{A}) \subseteq \overline{S(A)}$.

为了证明简化起见，我们先讨论 W 网 (W-net).

设 W 为 W 半群， Q 为非空有限集， $Q \times Q \times W$ 的任何非空有限子集 N 称为 W 网. Q 中元素为 N 的节点 (node). 设 $(q_\alpha, q_\beta, s) \in N$, s 称为在 N 中从 q_α 到 q_β 的跃迁 (transition). N 中的元素列 p 如有下列形式

$$p = < (q_0, q_1, s_1), (q_1, q_2, s_2), \cdots, (q_{r-1}, q_r, s_r) >,$$

p 称为 N 中的从 q_0 到 q_r 长度为 r 、宽度 $w(p) = s_1 s_2 \cdots s_r$ 的步， p 的结点列为 $\sigma(p) = (q_0, q_1, \cdots, q_r)$.

设 q_α, q_β 为 N 的任意两个结点，我们称 W 中元

$$\bigvee \{w(p) \mid p\text{为}N\text{从}q_\alpha\text{到}q_\beta\text{的步}\}$$

为 N 的从 q_α 到 q_β 的传导 (transmission), 记为 $t(q_\alpha, q_\beta)$.

定理 7.1.8 设 N 是 W 网， S 为 N 的跃迁集， q_α, q_β 为 N 的任意两个结点，则传导 $t(q_\alpha, q_\beta)$ 在 $\overline{S}$ 在中.

证明 由 N 我们构作另一个 W 网 N' 如下

$$(q_\gamma, q_\delta, s') \in N' \Leftrightarrow s' = \bigvee \{s_\mu \mid (q_\gamma, q_\delta, s_\mu) \in N\}.$$

这里 (q_γ, q_δ) 为 N 中的任一结点对. 则 N' 和 N 的结点和传导均相同且 N' 为完备 W 网，即每个结点对 (q_γ, q_δ) , N' 仅包含惟一三元组 (q_γ, q_δ, s'). 下面我们仅考虑完备 W 网. 为了方便我们需要下列引理.

引理 7.1.9 (结点淘汰定理) 设 N 是完备的 W 网，结点为 $q_1, q_2, \cdots, q_n, n > 1$. $s(i,j)$ 表示从 q_i 到 q_j, $1 \le i, j \le n$ 的跃迁. N' 是完备的 W 网，结点为 $q_1, q_2, \cdots, q_{n-1}$，从 q_i 到 q_j, $1 \le i, j \le n-1$ 的跃迁 $s'(i,j)$ 定义为

$$s'(i,j) = s(i,j) \vee s(i,n)s^*(n,n)s(n,j).$$

则 $t(i,j) = t'(i,j), 1 \le i, j \le n-1$, 这里 $t'(i,j)$ 是 N' 从 q_i 到 q_j 的传导.

证明 显然，$s'(i,j) \le t(i,j)$. 设 p' 为 N' 中从 q_i 到 q_j 的长度为 r 、宽度为 $w(p')$ 的步，则

$$w(p') = s'(i,k_1) \cdot s'(k_1,k_2) \cdots s'(k_{r-1},j).$$

因此

$$w(p') \le t(i,k_1) \cdot t(k_1,k_2) \cdots t(k_{r-1},j) \le t(i,j).$$

故 $t'(i,j) \le t(i,j)$. 另一方面，设 p 为 N 中从 q_i 到 q_j，$1 \le i, j < n$ 的步，p' 为由 p 所决定的 N' 的步，即将 p 的结点列 $\sigma(p)$ 中 q_n 去掉就为 p' 的结点列，因此 $w(p') \ge w(p)$，故 $t'(i,j) \ge t(i,j)$.

定理 7.1.8 的证明 (续) 设 N 为完备 W 网且结点为

$$q_1, q_2, \cdots, q_n.$$

A) 如果 $q_\alpha = q_\beta$, 记为 q_1. 我们对 n 作归纳法证明. 当 $n=1$ 时，$t(1,1) = 0$ 或 $t(1,1) = \overline{s(1,1)}$, 因此 $t(1,1) \in \overline{S}$. 设 $n > 1$, 应用引理 7.1.9，在 N 中淘汰结点 q_n 构造 W 网 N'. 由归纳假设 $t'(1,1) \in \overline{S'}$, S' 为 N' 的跃迁集，显然 $S' \subseteq \overline{S}$, 因此 $t(1,1) = t'(1,1) \in \overline{S'} \subseteq \overline{\overline{S}} = \overline{S}$.

B) 如果 $q_\alpha \neq q_\beta$, 记 $q_\alpha = q_1$, $q_\beta = q_2$. 对 n 作归纳法. 当 $n = 2$ 时,

$$\begin{aligned} t(1,2) &= [e \vee t(1,1)]s(1,2)[e \vee t(2,2)] \\ &= s(1,2) \vee s(1,2)t(2,2) \vee t(1,1)s(1,2) \\ &\quad \vee t(1,1)s(1,2)t(2,2). \end{aligned}$$

根据 A), $t(1,2) \in \overline{S}$. 下面归纳淘汰结点的方法类似于 A). □

定理 7.1.7 的证明 设 $A = (a_{ij})$ 为 W 半群 W 上的 $n \times n$ 矩阵, 考虑完备 W 网 N, 结点为 $1, 2, \cdots, n$ 且 $(i, j, s) \in N \Leftrightarrow s = a_{ij}$.

设 $t_r(i,j) = \bigvee\{w(p) \mid p\text{为从}i\text{到}j\text{长度为}r\text{的}N\text{的步}\}$, 则

$$(t_r(i,j)) = A^r, 1 \leq i, j \leq n.$$

因此, $(t(i,j)) = \overline{A}$. 根据定理 7.1.8 , $t(i,j) \in \overline{S(A)}$, 故 $S(\overline{A}) \subseteq \overline{S(A)}$. □

定理 7.1.10 设 S 为 W 半群的非空有限子集, f 为 S 术语, G_f 为 f 的生成集. 则存在 W 网 N, 结点为 $q_\alpha, q_\beta, \cdots, q_\alpha \neq q_\beta$, G_f 为 N 的跃迁集, f 为 N 从 q_α 到 q_β 的传导.

证明 A) 设 $e \in G_f$, 对 d_f 使用归纳法. 如果 $d_f = 0$, 结论显然成立. 设 S 术语 f 的 $d_f > 0$ 且假设定理对深度 $< d_f$ 的 S 术语均成立.

α) 设 $f = gh, d_g < d_f, d_h < d_f$. 设 N' 和 N'' 是 W 网且结点集分别为 $Q' = \{q'_\alpha, q'_\beta, \cdots\}$, $Q'' = \{q''_\alpha, q''_\beta, \cdots\}$, $t'(q'_\alpha, q'_\beta) = g$, $t''(q''_\alpha, q''_\beta) = h$, 我们重新定义 W 网 N , 其结点集为 $Q' \cup Q''$, 且

$$N = N' \cup N'' \cup (q''_\beta, q''_\alpha, e),$$

则 $t(q_\alpha, q''_\beta) = gh$.

β) 设 $f = g \vee h$, 类似于 α), 定义 W 网 N 如下:

$$N = N' \cup N'' \cup (q'_\alpha, q''_\alpha, e) \cup (q'_\beta, q''_\beta, e),$$

则 $t(q'_\alpha, q''_\beta) = g \vee h$.

γ) 如果 $f = \bar{g}, d_g < d_f$. 设 N' 为 W 网且结点为 $q'_\alpha, q'_\beta, \cdots$, $t'(q_\alpha, q'_\beta) = g$. 我们定义新 W 网

$$N = N' \cup (q'_\beta, q'_\alpha, e),$$

则 $t(q'_\alpha, q'_\beta) = \bar{g}$.

B) 设 $e \notin G_f$. 我们可以类似来证明, 它必须避免 e 跃迁出现, 故我们有以下简略情形:

α) 设 $f = gh$ 时,

$$N = N' \cup N'' \cup \{(q'_\beta, q'', s'') \mid q'' \in Q'', (q''_\alpha q'', s'') \in N''\}.$$

则 $t(q'_\alpha, q''_\beta) = gh$.

β) 设 $f = g \vee h$ 时,

$$\begin{aligned} N = N' \cup N'' \quad & \cup \quad \{(q'_\alpha, q'', s'') \mid q'' \in Q'', (q''_\alpha, q'', s'') \in N''\} \\ & \cup \quad \{(q', q''_\beta, s') \mid q' \in Q', (q', q'_\beta, s') \in N'\}. \end{aligned}$$

则 $t(q'_\alpha, q''_\beta) = g \vee h$.

γ) 设 $f = \bar{g}$ 时,

$$N = N' \cup \{(q'_\beta, q', s') \mid q' \in Q', (q'_\alpha, q', s') \in N'\}.$$

则 $t(q'_\alpha, q'_\beta) = \bar{g}$. □

关于可剩余 W 半群及 W 半群、 W 网在语言等方面应用可参见自动机、语言方面的书籍和 [92].

§2 可换序半群的交图

本节的主要结论来自 [93,94]，这里所指的序半群为可换序半群. 设 S 为可换序半群， $G(S)$ 表示 S 的所有凸真子半群集. 我们称一个图为交图是指一个顶点为集合的无向图，有边过两个不同的顶点当且仅当它们有非空交.

S 上的一个等价关系 A_S 称为是准阿基米德等价的，如果

$$(\forall x, y \in S)\ (x, y) \in A_S \Leftrightarrow (\exists k, m, n \in \mathbf{Z}^+) x^k \leq y^m \leq x^n.$$

$A(S)$ 为 S 的所有准阿基米德类集. 如果 $|A(S)| \geq 2$, 则 $A(S) \subset G(S)$. 设 $\emptyset \neq P \subseteq S$, P 生成的凸子半群记为 $C(P)$. 又记 $W = \{x^m y^n \mid m, n \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}\}$. 下列结论显然可得:

A) $C(x, y) = C(\{x, y\}) = \{z \in S \mid (\exists u, v \in W)\ u \leq z \leq v\}$；

B) 如果 $x \leq y$, 则 $C(x, y) = \{z \in S \mid (\exists m, n \in \mathbf{Z}^+)\ x^m \leq z \leq y^n\}$；

C) $C(x) = \{z \in S \mid (\exists m, n \in \mathbf{Z}^+)\ x^m \leq z \leq x^n\}$.

称 S 满足性质 $(*)$，如果存在 $a, b \in S$ 使得

$$\forall m, n \in \mathbf{Z}^+, C(a^m, b^n) = S.$$

下设交图 $G(S)$ 为连通图，$\delta(S)$ 为其直径, 则下列半群的 $\delta(S) = 0$:

D) 素数 p 阶循环群 S_p；

E) $S_0 = \{a, e\}, a^2 = e^2 = ae = ea = e, a \| e$；

F) $S_0^+ = \{a, e\} = (S_0, \leq), a > e$；

G) $S_0^- = (S_0, \leq), a < e$.

记 $Z = \{S_p, S_0, S_0^+, S_0^-\}$.

定理 7.2.1 设 S 为可换序半群，则下列各款成立：

1) 如果 $|S|=1$, 则 $G(S)=\emptyset$;

2) 如果 S 序同构于 Z 中任一半群，则 $\delta(S)=0$;

3) 如果 $|S|\geq 2, |A(S)|=1$ 且 S 不序同构于 Z 中任一半群，则 $\delta(S)=1$;

4) 如果 $|A(S)|\geq 2$, S 没有性质 (*), 则 $\delta(S)=2$;

5) 如果 $|A(S)|\geq 3$, S 具有性质 (*), 则 $\delta(S)=3$;

6) 如果 $|A(S)|=2$, S 具有性质 (*), 则 $G(S)$ 由两个全序分量组成.

证明 1), 2) 显然.

3) 设 $|S|\geq 2, |A(S)|=1$ 且 P, Q 为 S 的两个真凸子半群，取 $x\in P, y\in Q$, 则 $(x,y)\in A_S$, 即存在 $m,n,k\in \mathbf{Z}^+$ 使得

$$x^k\leq y^m\leq x^n,\quad y^m\in C(x)\cap C(y)\subseteq P\cap Q.$$

因此 $G(S)=\emptyset$ 或 $\delta(S)\leq 1$.

如果 $G(S)=\emptyset$, 则 $S=C(x), \forall x\in S$. 因为 $x^2\in C(x)$ 推出存在 $m,n\in\mathbf{Z}^+$ 使得 $x^{2m}\leq x\leq x^{2n}$, 令 $p=2m-1, q=2n-1$, 则 $x^{p+1}\leq x\leq x^{q+1}$, 由此导出

$$x\leq x^{q+1}\leq x^{2q+1}\leq\cdots\leq x^{pq+1}\leq\cdots\leq x^{2p+1}\leq x^{p+1}\leq x,$$

因此 $x=x^{pq+1}$. 令 $e=x^{pq}$, 则 $e^2=e$, 且 $S=C(e)=\{e\}$, 矛盾.

如果 $\delta(S)=0$, 则存在 $e=e^2\in S$ 且 $S=C(x), \forall x\neq e$. 取 $u\in S, u\neq e$, 由 $(u,e)\in A_S$ 得存在 $n\in\mathbf{Z}^+$ 使得 $e\leq u^n\leq e$, 即 $u^n=e$, 则 $H=\{u^n,u^{n+1},\cdots,u^{2n}\}$ 为 S 的循环子群. 如果 $|H|\geq 2$, H 存在素阶循环子群 K, 可证 K 为凸的，因此 $K=S$. 如果 $|H|=1$, 存在 $k\in\mathbf{Z}^+$ 使得 $a=u^k\neq e$, $a^2=e$, 即 $\forall m\in\mathbf{Z}^+$, $a^{m+1}=e$, 当然 $ae=ea=e$. 又设 $x\in S$ 且

$a \neq x \neq e$, 因为 $S = C(a)$, 则 $a < x < e$ 或 $e < x < a$. 如果 $a < x < e$, 则

$$(\forall m \in Z^+)\ e = a^{m+1} \leq x^{m+1} \leq e^{m+1} = e \Rightarrow x^{m+1} = e.$$

又 $a \in S = C(x)$, 故 $x < a < e$, 矛盾. 类似可证如果 $e < x < a$, 则也导出矛盾. 从而 S 序同构 S_0, S_0^+ 或 S_0^- .

4) 设 S 不满足性质 (*) 且 $|A(S)| \geq 2$, 由 1) 的证明可得 $G(S) \neq \emptyset$. 设 P, Q 为 S 的凸真子半群. 取 $x \in P, y \in Q$, 则假设存在 $m, n \in \mathbf{Z}^+$ 使得 $R = C(x^m, y^n) \neq S$, $x^m \in P \cap R \neq \emptyset$, $y^n \in Q \cap R \neq \emptyset$, 从而 $\delta(S) \leq 2$.

因为 $|A(S)| \geq 2$, 存在互不相同的准阿基米德类 P, Q. 又 $P \cap Q = \emptyset$, 所以 $\delta(S) > 1$, 故 $\delta(S) = 2$.

5) 设 S 满足性质 (*) 且 $|A(S)| \geq 3$, 由 1), $G(S) \neq \emptyset$, 设 P, Q 为 S 的真凸子半群, 如果存在 $x \in P, y \in Q$ 使得 $R = C(x, y) \neq S$, 那么 $R \cap Q \neq \emptyset$, $R \cap P \neq \emptyset$. 如果 $\forall x \in P$, $\forall y \in Q$ 均有 $C(x, y) = S$, 我们分几种情形进行讨论.

情形 A　设存在 $x \in P, y \in Q$ 使得 $x \leq y$ 或 $y \leq x$. 不妨设 $x \leq y$, 因为 $|A(S)| \geq 3$, 一定存在 $z \in S$ 使得 $z \notin (x)_{A_S}$, $z \notin (y)_{A_S}$. 因为 $C(x, y) = S$, 所以存在 $m, n \in \mathbf{Z}^+$ 使得 $x^m \leq z \leq y^n$. 令 $R = C(x^m, z), T = C(z, y^n)$. 如果 $R = S$, 则 $y \in R$, 存在 $r, s \in \mathbf{Z}^+$ 使得 $x^{mr} \leq y \leq z^s$, 推出 $z \in (y)_{A_S}$, 矛盾, 故 $R \neq S$. 同理可证 $T \neq S$. 因为 $x^m \in P \cap R$, $z \in R \cap T$, $y^n \in T \cap Q$, 故 $P \cap R, R \cap T, T \cap Q$ 均不为空.

情形 B　如果 P 和 Q 中的元素均互不可比较, 即 $x \| y$. 我们分以下几中情形讨论.

α)　存在 $x \in P, z \in S$ 使得 $x \notin (z)_{A_S}$ 且 $x \leq z$ 或 $z \leq x$. 不妨设 $x \leq z$, $y \in Q$, 因为 $z \in C(x, y)$, 存在 $m, n \in \mathbf{Z}^+$ 使得 $z \leq x^m y^n$. 令 $R = C(x, z)$, $T = C(z, y^n)$, 则 $R \neq S$, 否则 $y \in C(x, z)$ 和 P, Q 中任何元不可比较, 矛盾. 又 $T \neq S$, 否则

存在 $r,s\in \mathbf{Z}^+$ 使得 $x\geq z^r y^{ns}$, 因此

$$z^r z^s \leq z^r x^{ms} y^{ns} \leq x^{ms} x,$$

则 $x\in (z)_{A_S}$, 矛盾. 不难看出, $P\cap R, R\cap T, T\cap Q$ 均不为空.

β) 存在 $y\in Q, z\in S$ 使得 $y\notin (z)_{A_S}$ 且 $y\leq z$ 或 $z\leq x$. 类似于 α) 可证存在 S 的真凸子半群 R,T 使得 $P\cap R, R\cap T, T\cap Q$ 均不为空.

γ) 设 $\forall v\in S$, 如果 $u\in P\cup Q$ 且 $u\notin (v)_{A_S}$, 则 $u||v$. 因为 $|A(S)|\geq 3$, 由上选择的 $x\in P$, $y\in Q$, 即 $z\in S$ 使得 $x\notin (z)_{A_S}, y\notin (z)_{A_S}$. 因为 $S=C(x,y)$, 存在 $m,n\in \mathbf{Z}^+$ 使得 $z\geq x^m y^n$. 令 $R=C(a,ab), T=C(ab,b)$, $a=x^m, y^n=b$. 如果 $R=S$, 存在 $r,s\in N$ 使得 $b\leq a^r(ab)^s$ 或 $b\leq (ab)^s$. 如果 $b\leq a^r(ab)^s$, 则 $b^{r+1}\leq (ab)^{r+s}\leq z^{r+s}$, 即 $(b^{r+1}, z^{r+s})\in A_S$, 从而推出 $(y,z)\in A_S$, 矛盾. 如果 $b\leq (ab)^s$, 类似地可以推出矛盾, 因此 $R\neq S$. 类似可证 $T\neq S$. 结果 $a\in P\cap R\neq\emptyset$, $ab\in R\cap T\neq\emptyset$, $b\in T\cap Q\neq\emptyset$.

综上所讨论的各种情形得 $\delta(S)\leq 3$, 下证 $\delta(S)=3$. 事实上, 因为 S 有性质 (*), 则

$$\exists a,b\in S, \forall m,n\in \mathbf{Z}^+,\quad C(a^m,b^n)=S.$$

设 $a\in A\in A(S)$, $b\in B\in A(S)$, 因为 $|A(S)|\geq 3$, 所以 A,B 为两个不同的凸真子半群. 设 T 为 S 的凸子半群且 $A\cap T\neq\emptyset\neq B\cap T$, 则 $T=S$. 事实上, 设 $x\in A\cap T$, $y\in T\cap B$, 因为 $(x,a)\in A_S$, 存在 $r,m,s\in \mathbf{Z}^+$ 使得 $x^r\leq a^m\leq x^s$, 则 $a^m\in T$, 同理我们可证存在 $n\in \mathbf{Z}^+$ 使得 $b^n\in T$, 故 $S=C(a^m,b^n)\subseteq T$, 即 $S=T$. 我们证得 $\delta(S)=3$.

6) 设 S 具有性质 (*) 且 $|A(S)|=2$, 存在 S 的真凸子半群 A,B 使得 $S=A\cup B, A\cap B=\emptyset$ 且 $A,B\in A(S)$. 利用 5) 的同样方法可证 S 的每个真凸子半群均包含于 A 或 B 之中, 因此 $G(S)$ 为两个全序分量组成. □

通过以上定理证明我们看出，一个非平凡的序可换半群是准阿基米德的当且仅当交图 $G(S)$ 是链. 以上仅讨论了一类特殊半群，对任何半群又怎样呢？

§3 半格序半群的求导与形式语言

本节我们引入半格序半群 S 上的一个变换 (称之为导数)，讨论导数的性质. 给出一个半格序半群的导数是商映射的充分必要条件. 本节的主要结果来自 [95, 96].

设 $X \neq \emptyset$, $(X^*, \cdot)$ 是由字 $w = a_1a_2\cdots a_n$, $\forall a_i \in X$ 组成的自由幺半群，其中空字 λ 为单位元， X^* 的任意子集 A 称为 X 的形式语言. X^* 的幂集 $P(X^*)$ 关于集合的交、并运算和形式语言的乘法

$$(\forall A, B \in P(X^*)) \ \ A\cdot B = \{ab \mid a \in A, b \in B\}, \emptyset\cdot A = A\cdot\emptyset = \emptyset,$$

构成格序半群. 形式语言 A 关于字母 $a \in X$ ($\{a\} \in P(X^*)$) 的导数 $D_a(A)$ 定义为形式语言 $\{x \in X^* \mid ax \in A\}$, 那么 D_a 为 $P(X^*)$ 到 $P(X^*)$ 的变换且满足:

1) $D_a(A \cup B) = D_a(A) \cup D_a(B)$;
2) $D_a(A \cap B) = D_a(A) \cap D_a(B)$;
3) $D_a(A \cdot B) = D_a(A) \cdot B \cup \delta(A) \cdot D_a(B)$,

这里 $\delta(A) = \lambda$ 或 $\emptyset$, 由 $\lambda \in A$ 或 $\lambda \notin A$ 确定. 根据这一思想，我们引入一般半格序半群上的导数的概念.

定义 7.3.1 设 S 为带单位元 e 的半格序半群， S 上的变换 φ 如果满足： $\forall x, y \in S$

1) $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y)$;
2) $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y)$;

3) $$\varphi(xy) = \begin{cases} \varphi(x)y \vee \varphi(y), & x \geq e, \\ \varphi(x)y, & x \ngeq e, \end{cases}$$

则 φ 称为 S 的导数.

设 S 为带单位元的半格序半群, 显然 $\varphi = id$ 为 S 的导数; 如果 S 带最小元 0 且 $0 = 0x, \forall x \in S$, 则 $\varphi(x) = 0, \forall x \in S$ 为 S 的导数; 如果 $\varphi(x) = ax, \forall x \in S$, φ 是 S 的导数当且仅当 a 关于 "$\bigwedge$" 是左分配的.

命题 7.3.2 设 S 为半格序半群且有单位元 e , φ 为其导数, 则下列各款成立:

1) 如果 S 有最小元 0 且 $0 = x0, \forall x \in S$, 则 $\varphi(0) = 0$;

2) $\varphi(x^n) = \varphi(x)x^{n-1}, \forall x \in S, n \geq 2$;

3) 如果 S 有 0 且 $e \neq 0$, 则对 S 的任一右零元 c 均有 $\varphi(c) = c$;

4) 设 $c \geq e$ 且为 S 的左零元, 则 $\varphi(c) \geq \varphi(x)$, $\forall x \in S$;

5) 如果 S 有最大元 i 且 $0 \geq e$, 则 $0 = \varphi(i) \geq \varphi(x), \forall x \in S$;

6) 如果 S 是 Boole 代数或 S 为惟一补的或满足 $xy = x \wedge y$ $(\forall x, y \in S)$ 且 $e = i, \varphi(e) = e$, 则 $\varphi = id$;

7) 如果 S 为 Boole 代数且 $\varphi(e) = e, \varphi(0) = 0$, 则 $\varphi = id$.

证明 以上结论均不难验证, 略.

命题 7.3.3 设 S 为带单位元的半格序半群, 如果 $a \in S$ $(a \neq e)$ 存在右逆元 b, 则 S 的导数 φ 可写成 $\varphi(x) = \varphi(e)x, \forall x \in S$.

证明 因为 $ab = e$, 如果 $a > e$, $ab = e \geq b$, 但 $b \neq e$, 只有 $b < e$, 则

$$\begin{aligned}(\forall x \in S)\ \varphi(x) &= \varphi(ex) = \varphi(abx) \\ &= \varphi(a)bx \vee \varphi(b)x = \varphi(ab)x = \varphi(e)x;\end{aligned}$$

如果 $a \not\geq e$, 则

$$(\forall x \in S)\ \varphi(x) = \varphi(abx) = \varphi(a)bx = \varphi(ab)x = \varphi(e)x; \quad \square$$

例如，设 $(L,\wedge,\vee)$ 为格，$F(L)$ 为 L 上的变换集，则 $F(L)$ 关于函数的交、并及合成为格序群且有单位元 id, L 上的每个一一变换均有右逆元，故 $F(L)$ 上的任一导数 $\varphi(f)=\varphi(id)\circ f$ $(\forall f\in F(L))$.

命题 7.3.4 设 S 是格序半群且格 $(S,\vee,\wedge)$ 为 Boole 格 (布尔格序半群), $e\neq 0$, $ab=0$ 当且仅当 $a=0$ 或 $b=0$, 则 S 的每个满足 $\varphi(i)=i$ (i 为 S 的最大元) 的导数 φ 具有形式

$$\varphi(x)=\begin{cases} i, & x\geq e;\\ x, & x\not\geq e.\end{cases}$$

证明 由 7.3.2(1), $\varphi(0)=0$, 又 $\varphi(i)=i$, 得 $\varphi(x')=(\varphi(x))'$, $\forall x\in S$. 设 $x\geq e$, 则 $x'\not\geq e$,

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi(0)=\varphi(0y)=\varphi((x\wedge x')y)\\ &= \varphi(xy)\wedge\varphi(x'y)\\ &= [\varphi(x)y\vee\varphi(y)]\wedge\varphi(x')y\\ &= 0\vee[\varphi(x)\wedge\varphi(x')y]\quad(\forall y\in S).\end{aligned}$$

如果 $y=i$, 则 $0=\varphi(x')i$, 因为 $i\neq 0$, 只有 $\varphi(x')=0$, 从而 $\varphi(x)=i,\forall x\in S,x\geq e$. 因此

$$\varphi(x)=\varphi(ex)=\varphi(e)x\vee\varphi(x)=ix\vee\varphi(x)\geq ix\geq x,\forall x\in S.$$

如果 $x\not\geq e$, 则有下列两种情形:

情形 I $x||e$. 如果 $x'\geq e$, 则 $x\not\geq e$, 类似于 $x\geq e,x'\not\geq e$, 我们有 $\varphi(x)=0$, 但 $\varphi(x)\geq x,\forall x\in S$ 推出 $x=0$, 矛盾. 如果 $x'\not\geq e$, 则

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi(xy)\wedge\varphi(x'y)=\varphi(x)y\wedge\varphi(x')y\\ &= \varphi(x)y\wedge[\varphi(x')y\vee x'y]=0\vee[\varphi(x)y\wedge x'y]\\ &= (\varphi(x)\wedge x')y\quad(\forall y\in S).\end{aligned}$$

如果 $y = i$，则 $0 = [\varphi(x) \wedge x']i, \varphi(x) \wedge x' = 0$，因此 $\varphi(x) \leq x$. 又 $\varphi(x) \geq x$, 故 $x = \varphi(x), \forall x \in S$, $x||e$.

情形 II　$x < e$. 如果 $x = 0$, 则 $\varphi(0) = 0$; 如果 $x \neq 0$, 则 $x' \not\geq e$. 类似于 $x||e, x' \not\geq e$, 我们有 $\varphi(x) = x$. □

推论 7.3.5　设 S 为布尔格序半群且满足 $e \neq 0, ab = 0$ 当且仅当 $a = 0$ 或 $b = 0$, 则 S 的满足 $\varphi(i) = i$ 的导数是 id.

证明　因为 id 一定为 S 的导数，且 $id(i) = i$, 由命题 7.3.4, $id(x) = i, x \geq e$. 特别地，$e = id(e) = i$, 故 $\varphi(e) = e$. 由命题 7.3.2(6), $\varphi = id$. □

定义 7.3.6　设 S 为右商 (右可剩余的) 半格序半群，每个 S 上的变换 $\varphi_\alpha(x) = x : \alpha, \forall x \in S$ 称为 S 关于 α 的商映射.

其实，在半格序半群 $(P(X^*), \cap, \cup, \cdot)$ 中，$D_a(A) = A : a$ 就是 $P(X^*)$ 关于 $a \in X^*$ 的商映射.

下面我们讨论商映射的性质以及在什么条件下一般半格序半群的商映射为导数.

命题 7.3.7　设 S 为完备的、原子的布尔半格序半群且 $x0 = 0, \forall x \in S$, 则 S 的每个商映射 φ_α $(\alpha \neq 0)$ 是 S 上的一些原子商映射 φ_a (a 为原子) 的交.

证明　$\forall \alpha \in S, \alpha \neq 0$, 则 $\alpha = \bigvee a_i$, a_i 为 S 的原子. 由 S 为完备的，则

$$x : \alpha = x : (\bigvee a_i) = \bigwedge (x : a_i),$$

故 $\varphi_\alpha(x) = x : \alpha = \bigwedge \varphi_{a_i}(x)$, 即 $\varphi_\alpha = \bigwedge \varphi_{a_i}$. □

在 $(P(X^*), \cup, \cap, \cdot)$ 中，设 $T \subseteq X^*$, 则

$$\begin{aligned} D_T(A) &= \{x \in X^* \mid Tx \subseteq A\} \\ &= \bigcap_{t \in T} \{x \in X^* \mid tx \in A\} = \bigcap_{t \in T} D_t(A), \end{aligned}$$

这里 $\{t\}, t \in T$ 为 X 上的字且为 $P(X^*)$ 的原子. 设 $a = a_1a_2\cdots a_n$ 为 X 上的字, 我们可以得

$$D_{a_1a_2\cdots a_n}(A) = D_{a_n}[D_{a_1a_2\cdots a_{n-1}}(A)], \quad \forall A \in P(X^*),$$

即 $D_a = D_{a_n} \circ D_{a_{n-1}} \circ \cdots \circ D_{a_1}$.

设 S 为半格序半群且含单位元 e, $a \in S$ 称为不可约的, 如果 $a = bc$, 则 b, c 中必有一个元为单位元.

命题 7.3.8 设 S 为右商带单位元的半格序半群且 S 的每个非单位的原子为有限不可约原子之积, 则 φ_a(a 为原子) 可表为 $\varphi_{a_n} \circ \varphi_{a_{n-1}} \circ \cdots \circ \varphi_{a_1}$.

证明 设 $a = a_1a_2\cdots a_n$, a_i 为 S 的不可约原子, 则

$$\begin{aligned} x : a &= x : a_1 \cdots a_n = (x : a_1) : (a_2 \cdots a_n) \\ &= ((x : a_1 : a_2) : \cdots : a_n), \end{aligned}$$

从而 $\varphi_a(x) = (\varphi_{a_n} \circ \varphi_{a_{n-1}} \circ \cdots \circ \varphi_{a_1})(x)$, $\forall x \in S$. □

由上面两个命题, 在带有单位元的完备的原子布尔半格序半群 S 中, 我们在研究商映射 φ_a 时, 只需讨论 a 为不可约原子的情形, 因为其他情形均可用原子商映射 φ_a 表示出来.

命题 7.3.9 设 S 为带单位元 e 的右商半格序半群且满足:

1) 如果 $ax = 0$, 则 $x = 0$;

2) $ab = c$ 为原子, 则 b 是原子. 那么对 S 的原子 a, c, 有

$$\varphi_a(c) = \begin{cases} b, & c = ab; \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

证明 设 a, c 为原子且 $c = ab$, 则 b 为惟一元. 事实上, 设 $c = ab = ad$, 则 $c = a(b \vee d)$, 又 $b \vee d$ 为原子, 故 $b \vee d = b = d$.

结果 $c:a=b$. 如果 c 不能表示为以 a 为左因子的两个元素之积，则 $a(c:a)\neq c$, 只有 $a(c:a)=0$, 由假设 $c:a=0$. □

定理 7.3.10 设 S 为带单位元 e 的完备的原子的布尔半格序半群且满足：

1) $0x=x0=0,\forall x\in S$;

2) ab 为原子当且仅当 a,b 均为原子；

3) S 的每个原子均惟一表为 S 的不可约原子之积.

则 S 的每个关于不可约原子 a 的商映射 φ_a 为 S 的导数.

证明 我们分以下几步证明：

A) 设 a 为原子，则 $\varphi_a(\bigvee x_i)=\bigvee\varphi_a(x_i)$. 事实上，仅需证 $(\bigvee x_i):a=\bigvee(x_i:a)$. 设 $x_i:a=\alpha_i$, 因为 $a(\bigvee\alpha_i)=\bigvee a\alpha_i\leq\bigvee x_i$, 故 $\bigvee\alpha_i\leq(\bigvee x_i):a$. 又设 $m>\bigvee\alpha_i$, 但 $am\leq\bigvee x_i$. 则 $m\neq 0$, 因此 $m=\bigvee b_j$, b_j 为原子， $am=\bigvee(ab_j)\leq\bigvee x_i$. a 和 b_j 为原子，由假设 ab_j 为原子，存在 x_i 使得 $ab_j\leq x_i$, 因此 $b_j\leq\alpha_i$, 故 $m\leq\bigvee\alpha_i$, 矛盾. 我们这就证明了 $\bigvee\alpha_i=(\bigvee x_i):a$.

B) 设 a 为原子，则 $\varphi_a(x\wedge y)=\varphi_a(x)\wedge\varphi_a(y),\forall x,y\in S$. 我们只要利用 $(x\wedge y):a=(x:a)\wedge(y:a)$, $\forall x,y\in S$ 即可.

C) 设 a 为原子，则 $\varphi_a(0)=0,\varphi_a(i)=i$, 从而 $[\varphi_a(x)]'=\varphi_a(x'),\forall x\in S$. 事实上，假设 $ab=0$, 如果 $b\neq 0$, 则 $b=\bigvee b_i$, b_i 为原子， $0=ab=a(\bigvee b_i)=ab_i$, 即 $ab_i=0$, 和假设矛盾，故 $b=0$. 因为 $\varphi_a(0)=0:a$, 又 $a(0:a)=0$, 从而 $0:a=0$. 显然 $\varphi_a(i)=i:a=i$. 根据 A) 和 B), $\varphi_a(x)\vee\varphi_a(x')=\varphi_a(i)=i$, $\varphi_a(x)\wedge\varphi_a(x')=\varphi_a(0)=0$, 故 $\varphi_a(x')=(\varphi_a(x))',\forall x\in S$.

D) S 的每个原子是左 (右) 可消的. 设 a 为原子且 $ax=ay,x,y\in S$. 如果 $x=0$, 由假设 3) 得 $y=0$; 如果 $x\neq 0$, 则 $y\neq 0$. 设 $x=\bigvee x_i,y=\bigvee y_j$, x_i,y_j 为 S 的原子，设

$$ax=\bigvee ax_i=\bigvee ay_j\geq ay_j,$$

存在 ax_i 使得 $ay_j \le ax_i$. 又 ay_j 和 ax_i 均为原子，所以 $ay_j = ax_i = a(x_i \vee y_j)$. 由假设 2), 得 $x_i \vee y_j$ 为原子，只有 $x_i = y_j$. 由 y_j 的任意性，得出 $\{y_j \mid j \in J\} \subseteq \{x_i \mid i \in I\}$, 类似地得出 $\{x_i \mid i \in I\} \subseteq \{y_j \mid j \in J\}$ ，故 $x = y$.

E) 设 $x \not\geq e$, 则 $\varphi_a(xy) = \varphi_a(x)y$. 令 $q = \varphi_a(xy), r = \varphi_a(x)y$, 则 $ar = a(x:a)y \le xy$, 因此 $r \le q$. 为了证明 $q \le r$, 我们先证明下列事实，即设 $ab = cd$, 其中 a 为不可约原子， b, c, d 为原子且 $c \neq e$, 则存在原子 $w \in S$ 使得 $ab = awd$. 由假设 3), $a = b_1 b_2 \cdots b_m$, $c = c_1 c_2 \cdots c_k$, $d = d_1 d_2 \cdots d_n$, 由分解的惟一性得 $a = c_1$, 令 $w = c_2 \cdots c_k$ 得 $ab = awd$. 进一步地，如果 $az = xy, z, x, y \in S$ 且 $x \not\geq e, x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$, 则存在 $w \in S$ 使得 $az = awy$. 因为 $x = \bigvee x_i, y = \bigvee y_j$, $z = \bigvee z_k$, 所以 $az = \bigvee(az_k) = (\bigvee x_i)(\bigvee y_j) = \bigvee\bigvee(x_i y_j) \ge x_i y_j$. 因为 $x_i y_j$ 为原子，所以存在 az_k 使得 $az_k \ge x_i y_j$, 故 $x_i y_j = az_k = aw_i y_j$, $w_i \in S$ 为原子 (因为 $x = \bigvee x_i \not\geq e$ ，从而 $x_i \not\geq e$. 由 D), $x_i = aw_i$, $\forall i$, 故

$$az = \bigvee x_i y_j = a \bigvee w_i y_j = a(\bigvee w_i)(\bigvee y_j) = awy.$$

进一步地， $aq = a[(xy) : a] \le xy$. 如果 $aq = 0$, 则取 $x_1 = 0, y_1 = 0, x_1 \le x, y_1 \le y$, $aq = x_1 y_1$; 如果 $aq \neq 0$, 则 $x \neq 0, y \neq 0$, $aq = \bigvee a_l \le \bigvee x_i y_j$, 对每个 a_l ，存在 $x_i y_j$ 使得 $a_l \le x_i y_j$, 故 $a_l = x_i y_j$, 则 $aq = x_1 y_1$, $x_1 \le x, y_1 \le y$ 且 $x_1 \neq 0, y_1 \neq 0$ (如果 $x_1 = 0$ 或 $y_1 = 0$, 从而 $aq = 0$ 得出 $q = 0 \le r$). 由前面证明，因为 $x_1 \not\geq e$, 存在 $w \in S$ 使得 $aq = awy_1$, 由 D) $q = wy_1$. 又 $aw = x_1 \le x$, 故

$$q = wy_1 \le wy \le (x:a)y = r.$$

F) 如果 $x \ge e$, 则 $x \neq 0$ (因为 e 为原子). 下面要证 $\varphi_a(xy) = \varphi_a(x)y \vee \varphi_a(y)$. 因为 $x = \bigvee x_i \ge e$, 存在 x_i 使得

$x_i = e$, 将 x_i 中等于 e 的部分删去剩下之并记为 $\bar{x}$, 则 $x = \bar{x} \vee e$, 且 $\bar{x} \not\geq e$. 由 B),

$$\varphi_a(xy) = \varphi_a[(\bar{x} \vee e)y] = \varphi_a(\bar{x}y) \vee \varphi_a(y) = \varphi_a(\bar{x})y \vee \varphi_a(y),$$
$$\varphi_a(x) = \varphi_a(\bar{x} \vee e) = \varphi_a(\bar{x}) \vee \varphi_a(e).$$

我们分两种情形讨论:

a) 如果 e 不能表为 $ab, a \neq e$, 则 e 为不可约原子. 如果 $ab = 0$, 由 C), $b = 0$, $\varphi_a(e) = e : a$, 则 $a(e : a) \leq e$, 只有 $a(e : a) = e$ 或 $a(e : a) = 0$, 即只有 $e : a = 0$. 如果 $a = e$, 则 $\varphi_e(x) = x : e = x$, 无论怎样均有 $\varphi_a(x) = \varphi_a(\bar{x})$.

b) 如果 $e = ab$, 由命题 7.3.9, $\varphi_a(e) = b$. 从 $e = ab$ 得出 $y = aby$, 因此 $\varphi_a(y) = \varphi_a(e)y$. 如果 $y = 0$, 则 $\varphi_a(e)y = \varphi_a(y) = \varphi_a(0) = 0$ (命题 7.3.8). 如果 $y \neq 0$, 则 $y = \bigvee y_j$,

$$\varphi_a(y) = \bigvee \varphi_a(y_j) = \bigvee [\varphi_a(e)y_j] = \varphi_a(e)y,$$

结果

$$\varphi_a(x)y \vee \varphi_a(y) = \varphi_a(\bar{x})y\varphi_a(e)y \vee \varphi_a(y) = \varphi_a(\bar{x})y \vee \varphi_a(y) = \varphi_a(xy)$$

□

下面的定理给出了定理 7.3.10 的逆定理.

定理 7.3.11 设 S 为带单位元 e 的完备的、原子的布尔半格序半群且满足:

1) e 是原子;

2) $0x = x0 = 0, \forall x \in S$;

3) ab 为原子当且仅当 a, b 均为原子.

如果 S 上的每个变换 φ 满足:

4) $\varphi(\bigvee x_i) = \bigvee \varphi(x_i), \forall x_i \in S$;

5) $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y), \forall x, y \in S$;

6)

$$\varphi(xy) = \begin{cases} \varphi(x)y \vee \varphi(y), & x \geq e\ A\#, \\ \varphi(x)y, & x \not\geq e\ A\#; \end{cases}$$

7) $(\exists x \in S)\ \varphi(x) = e$.

则 φ 是关于某一原子的商映射.

证明 由 7), 存在 $x \in S$ 使得 $\varphi(x) = e$, 则 $x \neq 0$ (命题 7.3.2(1)). 如果 $x = e$, 由 $\varphi(e) = e$. 根据命题 7.3.2(7) 得出 $\varphi = id = \varphi_e$. 如果 $x \neq e, 0$, 则 $x = \bigvee x_i$, x_i 为原子, $\varphi(x) = \bigvee \varphi(x_i) = e$, 从而 $\varphi(x_i) \leq e, \forall x_i$. 如果 $\varphi(x_i) = 0, \forall x_i$, 则 $\varphi(x) = 0 = e$, 矛盾, 故至少存在 x_i 使得 $\varphi(x_i) = e$. 取 $a = x_i$, 有 $\varphi(a) = e$ 且 $\varphi(ax) = \varphi(a)x = ex = x, \forall x \in S$.

对 S 的任意原子 c, 如果 $\varphi(c) \neq 0$, 则 $\varphi(c) = \bigvee c_j$, c_j 为原子. 因 $\varphi(ac_j) = \varphi(a)c_j = c_j$, 故

$$\varphi(c \wedge ac_j) = \varphi(c) \wedge \varphi(ac_j) = \varphi(c) \wedge c_j = c_j.$$

如果 $c \neq ac_j$, $c \wedge ac_j = 0$, 则 $c_j = \varphi(0) = 0$, 矛盾. 因此 $c = ac_j$ 且 $\varphi(c) = \varphi(ac_j) = c_j$. 反之, 如果 $\varphi(c) = c_1$, c_1 为原子, 则 $\varphi(ac_1) = c_1$ 推出 $\varphi(c \wedge ac_1) = c_1$. 因此 $c = ac_1$, 否则 $c_1 = \varphi(0) = 0$, 矛盾. 以上我们证明了 $\varphi(c) = c_1$ 当且仅当 $c = ac_1$ (c_1 为原子) 且其他情形均有 $\varphi(c) = 0$.

由命题 7.3.9, $\varphi(x) = \varphi_a(x)$, $\forall x \in S$ 且为 S 的原子. 设 $x = 0$, 则 $\varphi(0) = \varphi_a(0) = 0$; 如果 $x \neq 0$, 则 $x = \bigvee x_i$, x_i 为原子, 因此

$$\varphi(x) = \bigvee \varphi(x_i) = \bigvee \varphi_a(x_i) = \varphi_a(\bigvee x_i) = \varphi_a(x).$$

即 $\varphi = \varphi_a$. □

通过以上定理我们得出在 $(P(X^*), \cup, \cap, \cdot)$ 中不可能存在满足导数定义而不是 $P(X^*)$ 上导数的其他变换.

参 考 文 献

[1] N. Kehayopulu, On weakly prime ideals in ordered semigroups, Math. Japonica, 35(1990), 1051–1056

[2] N. Kehayopulu, On prime, weakly prime ideals in ordered semigroups, Semigroup Forum, 44(1992), 341–346

[3] N. Kehayopulu, S. Lajos and M. Tsingelis, Note on prime, weakly prime ideals in ordered semigroups, Pure Math. and Appl., 5(1994), No. 2, 293–297

[4] 吴明芬，谢祥云，关于偏序半群的素理想与弱素理想，兰州大学学报（自然科学版），32(1996), 22–25

[5] X.Y. Xie and M.F. Wu, On quasi-prime, weakly quasi-prime left ideals in ordered semigroups, PU.M.A.(Hungary), 6(1995), 105–120

[6] J. Daus, Prime modules and one-sided ideals, Ring Theory and Algebra III, 301-334 (Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 55, Marcel Dekker, 1980)

[7] 谢祥云，郭小江，偏序半群的 C 左理想，数学学报， 40(1997), 54–60

[8] 谢祥云，赵宪钟，偏序半群的左基，纯粹数学与应用数学， 12(1996), 73–78

[9] C. S. Hoo and K. P. Shum, Prime radical theorem on ordered semigroups, Semigroup Forum, 19(1980), 84–94

[10] M. Petrich, Introduction to Semigroups, Merrill, Columbus, 1973

[11] X.Y. Xie and M.F. Wu, On the ideal extensions in ordered semigroups, Semigroup Forum, 53(1996), 63–71

[12] A. H. Clifford and G. B. Preston, The Algebraic Theory of Semigroups, Vol. I et II, AMS Providence, 1991

[13] A. J. Hulin, Extensions of ordered semigroups, Semigroup Forum, 2(1971), 336–342

[14] A. J. Hulin, Extensions of ordered semigroups, Czech. Math. J., 26(1976), 1–12

[15] N. Kehayopulu, On adjoining ientity to semigroups, greatest element to ordered sets, Math. Japonica , 36(1991), 695–702

[16] N. Kehayopulu, On adjoining greatest element to ordered semigroups, Math. Japonica, 38(1993), 61–66

[17] 谢祥云, 郭小江, 关于 N. Kehayopulu 问题, 兰州大学学报 (自然科学版), 33(1997), 24–27

[18] N. Kehayopulu and M. Tsingelis, The embedding of an ordered semigroup in a simple one with identity, Semigroup Forum, 53(1996), 346–350

[19] M. W. Chan and K. P. Shum, Homomorphisms of implicative semigroups, Semigroup Forum, 46(1993), 7–15

[20] Z. Gao, On the least property of the semilattice congruence on po-semigroups, Semigroup Forum, 56(1998), 323–333

[21] X.Y. Xie and M.F. Wu, On congruence on ordered semigroups, Math. Japonica, 45(1997), 81–84

[22] N. Kehayopulu and M. Tsingelis, *N*-subsets of ordered semigroups, In: E. S. Lyapin(ed.), Decompositions and homomorphic mappings of semigroups, Interuniversity collect of scientific words, Sankt-Peterburge: Obrazovanie, 1992, 56–63

[23] Y.L. Cao, Complete semilattice decompositions of ordered semigroups, Comm. Algebra, to appear

[24] 曹永林, 偏序半群的最大自然序半格同态像, 纯粹数学与应用数学, 14(1998), 81–84

[25] Y.L. Cao, On weak commutativity of po-semigroups and their semilattice decompositions, Semigroup Forum, 58(1999), 386–394

[26] N. Kehayopulu, On weakly commutative poe-semigroups, Math. Japonica, 36(1991), 427–432

[27] N. Kehayopulu and M. Tsingelis, On weakly commutative ordered semigroups, Semigroup Forum, 56(1998), 32–35

[28] N. Kehayopulu, P. Kiriakuli, S. Hanumantha Rao and P. Lakshmi, On weakly commutative poe-semigroups, Semigroup Forum, 41(1990), 373–376

[29] 景奉杰, 赵宪钟, 关于弱交换 po 半群中的一个问题, 纯粹数学与应用数学, 10(1994), 59–63

[30] F. Jing and H. Chen, On weakly commutative po-semigroups, 数学研究与评论, 15(1995), 25–28

[31] P. V. Ramana Murty, On eventually regular semigroups and weakly commutative poe-semigroups, Proc. of the SEAMS Conference on Ordered Structures and Algebra of Computer Languages, 116–125

[32] P. V. R. Murty and S. H. Rao, On a problem in poe-semigroups, Semigroup Forum, 43(1991), 260–262

[33] X.Y. Xie, Bands of weakly r-archimedean ordered semigroups, Semigroup Forum, to appear

[34] S. Bogdanovic, Semigroups With a System of Subsemigroups, University of Novi Sad, 1995

[35] J. M. Howie, An Introduction to Semigroup Theory, Academic Press INC, 1976

[36] N. Kehayopulu, On intra-regular $\vee e$-semigroups, Semigroup Forum, 19(1980), 111–121

[37] N. Kehayopulu, On regular, intra-regular ordered semigroups, Pure Math. and Appl., 4(1993), 447–461

[38] N. Kehayopulu, On intra-regular ordered semigroups, Semigroup Forum, 46(1993), 271–278

[39] N. Kehayopulu, S. Lajos and M. Tsingelis, On intra-regular ordered semigroups, Pure Math. and Appl., 4(1993), 317–327

[40] N. Kehayopulu and M. Tsingelis, On intra-regular ordered semigroups, Pure Math. and Appl., to appear

[41] N. Kehayopulu, On completely regular poe-semigroups, Math. Japonica, 37(1992), 123–130

[42] N. Kehayopulu and M. Tsingelis, A characterization of strongly regular ordered semigroups, Math. Japonica 48(1998), 213–215

[43] N. Kehayopulu, On regular duo ordered semigroups, Math. Japonica, 37(1992), 535–540

[44] N. Kehayopulu, On left regular and left duo poe-semigroups, Semigroup Forum, 44(1992), 306–313

[45] N. Kehayopulu, Note on left regular and left duo poe-semigroups, Sovremennaja Algebra, St.Petersburg Gos. Ped. Herzen Inst., to appear

[46] N. Kehayopulu, On regular, regular duo ordered semigroups, Pure Math. and Appl., 5(1994), 161–176

[47] N. Kehayopulu and G. Lepouras, On right regular and right duo poe-semigroups, Math. Japonica, 47(1998), 281–285

[48] N. Kehayopulu, A note on left regular and left duo poe-semigroups, Math. Japonica, 47(1998), 85–86

[49] X.Y. Xie, On semilattices of B-simple ordered semigroups, 数学进展, submitted.

[50] X.Y. Xie, On regular duo ordered semigroups, Far East J. Math. Sci., 7(1999), 951–959

[51] N. Kehayopulu and M. Tsingelis, On subdirectly irreducible ordered semigroups, Semigroup Forum, 50(1995), 161–177

[52] N. Kehayopulu and M. Tsingelis, Pseudo-order in ordered semigroups, Semigroup Forum, 50(1995), 389–392

[53] X.Y. Xie, On regular, strongly regular congruences on ordered semigroups, Semigroup Forum, to appear

[54] Z. Gao and K. P. Shum, On *P-Q* ordered semigroups, Period. Math. Hung., 28(1994), 211-220.

[55] Y. B. Jun, J. Meng and X. L. Xin, On ordered filters of implicative semigroups, Semigroup Forum, 54(1997), 75–82

[56] K. Murata, A characterization of Artinian *l*-semigroups, Proc. Japan Acad., 47(1971), 127–131

[57] H. Mitsch, Rechtsteilweise geordnete Hablgruppen mit Teilbarkeitsordnung, Beitr. Alg. u. Geom., 3(1974), 23–35

[58] H. Mitsch, Rechtsverbandshalbgruppen, J. fur Reine u. Angew. Math., 264(1973), 172–181

[59] K. Murata, On Dedekindian *l*-semigroups and its lattice-ideals, Proc. Japan. Acad., 47(1971), 132–134

[60] B. Bosbach, Representable divisibility semigroups, Proc. Edinburgh Math. Soc., 34(1991), 45–64

[61] I. Szabo, On a class of lattice-ordered semigroups, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 30(1977), 141–147

[62] O. Steinfeid, Uber die regularen duo-Elemente in Gruppiod-Verbanden, Acta. Sci. Math.(Szeged), 32(1971), 327–331

[63] O. Steinfeid, Uber Gruppiod-Verbande (I), Acta. Sci. Math. (Szeged), 31(1970), 203–218

[64] O. Steinfeid, Uber Gruppoid-Verbande, Period Math. Hunger., 4(1973), 169–181

[65] O. Steinfeid, Uber Metaobsorbente in Gruppiod-Verbande, Acta. Math. Acad. Sci. Hunger., 24(1973), 313–328

[66] N. P. Rao, Brouwierian semigroups I, Math. Japonica, 23(1978), 49–60

[67] N. P. Rao, Brouwierian semigroups II, Math. Seminar Notes, 7(1979), 33–42

[68] V. V. R. Rao, Semi-dually residuated lattice-ordered semigroups, Math. Seminer Notes, 6(1978), 143–148

[69] L. K. N. Swamy , On ideals in Brouwerian semigroups, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, 14(1986), 83–97

[70] L. Fuchs, A remark on lattice-ordered semigroups, Semigroup Forum, 7(1974), 372–374

[71] B. Bosbach, Zur Theorie der Teibarkeitschalbgruppen, Semigroup Forum, 3(1971), 1–30

[72] X.Y. Xie, Ideals in lattice-ordered semigroups, Soochow Math. J., 22(1996), 75–84

[73] X.Y. Xie, On distributive L-semilattices, SEA. Bull. Math., 20(1996), 47–52

[74] G. Ciobanu and M. Deaconescu, On certain lattice-ordered semigroups, Semigroup Forum, 31(1985), 367–371

[75] Th. Merlier, Sur les bandes reticulees, Semigroup Forum, 22(1981), 191–198

[76] Th. Merlier, Some properties of lattice ordered Rees Matrix semigroups, Czech. Math. Jour. 38(1988), 573–577

[77] Th. Merlier, Totally orderable semigroups and locally finite semigroups, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai. 20 Algebraic theory of semigroups, SZEGED, 1976

[78] Th. Merlier, On lattice-ordered periodic semigroups, Czech. Math. Jour., 43(1993), 95–106

[79] V. V. Vagner, Represention of ordered semigroups, AMS Transalations, 36(1960), 295–336

[80] V. B. Repnitzkii, On subdirctly irreducible lattice-ordered semigroups, Semigroup Forum, 29(1984), 277–318

[81] G. Kowol and H. Mitsch, On the decomposition of rl-semigroups into groups, Semigroup Forum, 13(1976), 127–134

[82] C. C. Edwards and M. Anderson, Lattice properties of the symmetric weakly inverse semigroup on a totally ordered set, J. Austral. Math. Soc., 31(1981), 395–404

[83] H. Andreka, Representations of distributive lattice-ordered semigroups with binary relations, Algebra Universalis, 28(1991), 12–25

[84] B. Pondelicek, On representations of tolerance ordered commutative semigroups, Czech. Math. J., 31(1981), 153–158

[85] Th. Merlier, Sur les demi-groupes recules et les o.demi-gropues, Semigroup Forum, 2(1971), 64–70

[86] M. Anderson and T. Feil, Lattice-Ordered Groups, An Introduction, D. Reindel Pub. Comp., 1988

[87] M. Anderson and C. C. Edwards, A representation theorem for distributive l-monoids, Canad. Math. Bull., 27(1984), 238–240

[88] K. Iseki, A characterization of distributive lattices, Nederl. Akad. Wetensch. Proc., 54(1951), 388–398

[89] J. Jakubik, On strictly positive lattice-ordered semigroups, Czech. Math. J., 36(1986), 31–34

[90] M. Anderson, Archimedean equivalence fot strictly positive lattice-ordered semigroups, Czech. Math. J., 36(1986), 18–26

[91] W. H. Conrnish, Subdirect decompositions of semilattice-ordered semigroups, Math. Japonica, 18(1973) 203–209

[92] M. Yoel, lattice-ordered semigroups, graphs, and automata, J. Soc. Indust. Appl. Math., 13(1965), 411–421

[93] B. Pondelicek, The intersection graph of an ordered commutative semigroups, Semigroup Forum, 19(1980), 213–218

[94] B. Pondelicek, The intersetion graph of a simply ordered semigroup, Semigroup Forum, 18(1970), 229–233

[95] H. Mitsch, Derivations on l-semigroups and formal languages, Acta. Sci. Math., 43(1981), 91–104

[96] H. Mitsch, Derivations and translations on rl-semigroups, Acta Sci. Math., 40(1978), 301–308

[97] J. Daus, One sided prime ideals, Pacific Jour. Math., 47(1973), 401–412

[98] N. H. McCoy, The Theory of Rings, MacMillan, 1968

[99] F. Hansen, On one-sided prime ideals, Pacific Jour. Math., 58(1975), 79–85

[100] X.Y. Xie and M.F. Wu, On po-semigroups containing no maximal ideals, SEA. Bull. Math., 20(1996), 31–36

[101] S. T. Blyth, Pseudo-residuals in semigroups, J. London Math. Soc., 40(1965), 441–454

[102] L. Fuchs, Partially Ordered Algebraic Systems, Pergamon Press, 1963

[103] G. Birkhoff, Lattice Theory, AMS, Providence, 1967

[104] T. S. Blyth and M. F. Janowtz, Residuation Theory, Pergamon, 1972

[105] S. Y. Kwan and K. P. Shum, Lattices of ordered semigroups, Semigroup Forum, 19(1980), 151–175

[106] L. Berg, Extensions of involutory semigroups, Kobe J. Math., 10(1993), 47–55

[107] J. Jakubik, On filters of ordered semigroups, Czech. Math. Jour., 43(1993), 519–522

[108] T. S. Blyth, On the endomorphism semigroup of an ordered set, Glasgow Math. J. 37(1995), 173–178

[109] N. Kehayopulu, On right regular and right duo ordered semigroups, Math. Japonica, 36(1991), 201–206

[110] N. Kehayopulu, Note On Green's relations in ordered semigroups, Math. Japonica, 36(1991), 211–214

[111] N. Kehayopulu, On regular ordered semigroups, Math. Japonica, 45(1997), 549–553

[112] N. Kehayopulu and S. Lajos, A note on semigroup, ordered semigroups, Pure Math. and Appl., 5(1994), 34–37

[113] N. Kehayopulu, On semilattices of simple poe-semigroups, Math. Japonica, 38(1993), 305–318

[114] N. Kehayopulu and M. Tsingelis, Note on prime, weakly prime ideals in ordered semigroups, Pure Math. and Appl., to appear

[115] N. Kehayopulu, G. Lepouras and M. Tsingelis, On right regular and right duo ordered semigroups, Math. Japonica, 46(1997), 311–315

[116] N. Kehayopulu, On ordered semigroups without nilpotent ideal elements, Math. Japonica, 36(1991), 323–326

[117] N. Kehayopulu and M. Tsingelis, On the decomposition of prime ideals of ordered semigroups into their $\mathcal{N}$-classes, Semigroup Forum, 47(1993), 393–395

[118] N. Kehayopulu and M. Tsingelis, On separative ordered semigroups, Semigroup Forum, 56(1998), 187–196

[119] N. Kehayopulu, On filters generated in poe-semigroups, Math. Japonica, 35(1990), 780–796

[120] N. Kehayopulu, Remark on ordered semigroups, Math. Japonica, 35(1990), 1061–1063

[121] N. Kehayopulu, On left regular ordered semigroups, Math. Japonica, 35(1990), 1057–1060

[122] Sang Keun Lee, On characterizations of some classes of po-semigroups, Math. Japonica, 47(1998), 51–55

[123] Sang Keun Lee and Young In Kwon, On completely regular and quasi-completely regular ordered semigroups, Math. Japonica, 47(1998), 247–251

[124] J. Chvalina, The Iseki-Type characterization of certain regular ordered semigroups, Czech. Math. Jour., 47(1997), 261–276

[125] X.Y. Xie, Regular congruences classes of ordered semigroups, 数学研究与评论，待发

[126] X.Y. Xie, On Lattice-ordered Rees Matrix semigroups, Northeast. Math. J., 11(1995), 297–301

[127] X.Y. Xie and M.F. Wu, Complete distributivity of the lattice LC(S) of lattice-ordered semigroups, Northeast. Math. J., 12(1996), 407–412

[128] 谢祥云，序半群的正则同余的注记，兰州大学学报 (自然科学版), 35(1999), 30–33

[129] M. F. Wu and X.Y. Xie, L-congruences of certain lattice-ordered semigroups, 数学杂志， 17(1997), 122–126

[130] X.J. Guo and X.Y. Xie, On type A semigroups, Semigroup Forum, 58(1999), 313–316

[131] X.Y. Xie, On regular, strongly regular congruences on ordered semigroups, 数学进展， 27(1998), 273–275

[132] X.Y, Xie, Remarks on regular congruences on ordered semigroups, SEA. Bull. Math., to appear.

[133] K. Murata, Generalized prime elements in a compactly generalized l-semigroups I, Proc. Japan Acad., 49(1973), 133–139

[134] K. Murata, Generalized prime elements in a compactly generalized l-semigroups II, Proc. Japan Acad., 49(1973), 309–313

[135] D. D. Anderson and E. W. Johnson, Ideal theory in commutative semigroups, Semigroup Forum, 30(1984), 127–158

[136] C. J. Ash, The lattice of ideals of a semigroup, Algebra Universalis, 10(1980), 395–398

[137] B. Pondelicek, Princinpal tolerance trival commutative semigroups, Acta Sci. Math., 52(1988), 29–33

[138] M. Ciric and S. Bogdanovic, Semilattice decompositions of semigroups, Semigroup Forum, 52(1996), 119–132

[139] A. Urquhart, Decision problems for distributive lattice-ordered semigroups, Algebra Universalis, 33(1995), 399–418

[140] R. McFadden, Partically ordered semigroups as semigroups, Proc. London Math. Soc., 31(1980), 177–189

[141] D. C. J. Bugress and R. McFadden, Systems of ideals in partially ordered semigroups, Math. Zeitschr., 79(1962), 439–450

[142] E. Ja. Gabovic and G. J. Rubanovic, The lattice of convex subgroupoids of an ordered groupoid, Semigroup Forum, 5(1972), 54–64

[143] T. Saito, the orderablity of completely regular semigroups, Semigroup Forum, 10(1975), 269–272

[144] S. Sribala, On Σ-ordered inverse semigroups, Acta Sci. Math. (Szeged), 35(1973), 207–210

[145] P. J. McCarthy, Homomorphisms of certain commutative lattice-ordered semigroups, Acta Sci. Math. (Szeged), 27(1966), 63–65

[146] J. C. Varlet, On distributive residuated groupoids, Semigroup Forum, 6(1973), 80–85

[147] L. Ocarroll, A class of congruences on a po-semigroup, Semigroup Forum, 3(1971/72), 173–179

[148] W. C. Holland, The lattice-ordered group of automorphisms of an ordered set, Michigan Math. J., 10(1963), 399–408

[149] B. M. Schein, Function ∪-semigroups, Colloq. Math., 31(1974), 11–20

[150] B. Pondelicek, Archimedean equivalence on ordered semigroups, Czech. Math. J., 22(1972), 210–219

[151] Z. Shmuely, On bounded po-semigroups, Proc. Amer. Math. Soc., 58(1976), 37–43

[152] S. D. Hippisley-Cox, On the structure of certain po-semigroups, Semigroup Forum, 44(1992), 213–220

[153] E. A. Behrens, Power series developments in lattice-ordered semigroups, Semigroup Forum, 15(1977), 51–60

[154] H. J. Weinert, Some remarks on certain partially ordered semigroups, Semigroup Forum, 34(1986), 235–242

[155] M. Satyanarayana, Ordered semigroups containing maximal or minimal elements, Semigroup Forum, 37(1988), 225–231

[156] D. B. McAlister, Amenably ordered inverse semigroups, J. Algebra, 65(1980), 118–146

[157] B. Bosbach, Schwache Teilbarkeitshalbgruppen, Semigroup Forum, 12(1976), 119–135

[158] T. Tamura, On Putcha's therorem concerning semilattice of achimedean semigroups, Semigroup Forum, 4(1972), 83–86

[159] L. Li and B. M. Schein, Ordered set which support inverse semigroups, three examples, Semigroup Forum, 30(1984), 234–236

[160] M. Anderson, Partially ordered semigroups with an abundance of principal idempotents, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 99, 1–5

[161] L. Fuchs, On group homomorphic images of partially ordered semigroups, Acta Sci. Math. (Szeged), 25(1964), 139–142

[162] M. Satyanarayana, Positively ordered semigroups, Pure and Applied Math., 42(1979), 1–101

[163] R. S. Pierce, Arithmetic properties of certain partially ordered semigroups, Semigroup Forum, 11(1975), 115–29

[164] P. Conrad, The lattice of all convex l-subgroups of a lattice-ordered group, Czech. Math. J., 15(1965), 101–22